

BARCZA SZABOLCS

CSILLAGLÉGKÖRÖK FIZIKÁJA

CSILLAGSZÍNKÉPEK KIÉRTÉKELÉSÉNEK ASZTROFIZIKAI ALAPJAI

Egyetemi jegyzet

BUDAPEST, 1997

AZ ELTE Eötvös Kiadónál megjelent 1997-es kiadás revideált változata

Az 1997-es kiadást lektorálta Kolláth Zoltán

A kiadást támogatta a Magyar Tudományos Akadémia Csillagászati Kutatóintézete

ELTE Eötvös Kiadó
Felelős vezető: H. Nagy Anna

(a régi) TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS	5
2. ALAPFOGALMAK	8
2.1. Monokromatikus elektromágneses síkhullám terjedése, elnyelődése homogén közegben	8
2.2. Monokromatikus intenzitás	10
2.3. Monokromatikus fluxus	11
2.4. Monokromatikus sugárzási energiasűrűség	12
2.5. Összintenzitás, fluxus, energiasűrűség	12
2.6. Monokromatikus emissziós koefficiens	13
2.7. Monokromatikus abszorpciós koefficiens, optikai mélység	13
2.8. Termikus egyensúly, sugárnyomás	14
2.9. Négy alkalmazás	16
2.10. Néhány fizikai állandó és az egységek közötti átszámítás	19
3. AZ ALAPFOGALMAK ÉS A MEGFIGYELÉSEK KAPCSOLATA	20
4. A MONOKROMATIKUS SUGÁRZÁS ÁRAMLÁSI EGYENLETE	23
4.1. A monokromatikus áramlási egyenlet felírása, forrásfüggvény, sugárzási egyensúly	23
4.2. A monokromatikus áramlási egyenlet formális megoldása	25
4.3. A megoldás értelmezése	27
5. SZÜRKE MODELLEK	30
5.1. Az Eddington-közelítés	30
5.2. Csillagok peremsötétedése	32
5.3. A szürke modell hőmérséklet-rétegződése	32
5.4. A Rosseland-féle opacitás	33
5.5. A szürke modellek hőmérséklet-eloszlásának korrekciója, konstans fluxusú légkörmodellek	34
6. EGYENSÚLYOK A CSILLAGOK LÉGKÖRÉBEN	36
6.1. Termikus egyensúly	36
6.2. LTE (Lokális termodinamikai egyensúly)	40
6.3. NLTE	40
6.4. A sugárzási egyensúly kialakulása	41
6.5. Hidrodinamikai kérdések: hidrosztatikus egyensúly, Eddington-határ, diffúzió, lökeshullámok, keveredési hossz, mikro- és makroturbulencia	42
6.6. Hidrosztatikus egyensúlyban lévő leegyszerűsített légkörmodell	47
6.7. Konvekció	48

7. A FORRÁSFÜGGVÉNY	53
7.1. Az átmenetek típusai	53
7.2. Koherens, inkoherens szórás, valódi abszorpció, extinkció	55
7.3. A Schwarzschild-féle integrodifferenciálegyenlet	56
8. A MONOKROMATIKUS ABSZORPCIÓS KOEFFICIENS KISZÁMÍTÁSA	58
8.1. Az Einstein-féle átmeneti valószínűségek	59
8.2. Egy rezgő töltés sugárzása a klasszikus elektrodinamika keretei között, Lorentz-profil, Thomson-szórás, Rayleigh-szórás	61
8.3. Oszcillátorerősség	65
8.4. Átmeneti valószínűségek időtől függő perturbáció esetén	66
8.5. Elektromágneses hullám mint az átmenetet indukáló perturbáció	68
8.6. Az oszcillátorerősség és az átmeneti mátrixelem	71
8.7. Átmeneti valószínűségek a folytonos színekben	76
9. A SZÍNKÉPVONALAK KISZÉLESEDÉSE	79
9.1. A színekpvonalak profilja	79
9.2. Véges hosszúságú rezgések spektruma	80
9.3. Természetes vonalkiszélesedés	82
9.4. Doppler-kiszélesedés	83
9.5. Nyomási vonalkiszélesedés	84
9.6. Voigt-függvény	89
9.7. Rotációs vonalkiszélesedés	90
10. A CSILLAGSZÍNKÉPEK KIÉRTÉKELÉSE	91
10.1. Csillagszínekpek néhány sajátossága	91
10.2. Az ATLAS légkörmodellek	96
10.3. Növekedési görbék, színekpek finom analízise	96
10.4. Kozmikus elemgyakoriságok	100
10.5. A Baade–Wesselink-módszer	102

1. fejezet

BEVEZETÉS

A klasszikus csillagászat a XIX. sz. elejéig csak az égitestekből származó fény irányával foglalkozott. F. W. Bessel (1784–1846) kijelentette egy nem kifejezetten csillagászatnak tartott előadásában, hogy "mindig is világos volt az, amit a csillagászatnak nyújtania kell: eljárásokat kell megadnia, amelyekkel az égitestek mozgását ki lehet számítani, úgy, ahogy az a Földről látszik. Minden egyéb, amit az égitestekről meg lehet tudni: például a felületük kinézete és létrejötte ugyan nem érdektelen, de nem képezi a csillagászati érdeklődés tárgyát". C. F. Gauss (1777–1855), aki Göttingen egyetemén a csillagászat professzora és az egyetemi csillagvizsgáló igazgatója volt, és élete végéig rendszeresen végzett saját maga is megfigyeléseket, egyszer azt mondta, hogy a fizikai csillagászat ugyan érdekes, de ő mégsem tartja sokra azt, mert ebben a tudományágban a matematika alkalmazása nem sok eredménnyel kecsegtet. E kijelentésen ugyan ma mosolygunk, de nyugodtan mondhatjuk, hogy az asztrofizika (a "fizikai csillagászat") a csillagászatban csak a XIX. sz. második felében nyert polgárjogot, s ez a jegyzet bizonyára arról is meggyőzi majd az olvasót, hogy az alkalmazott matematika nélkül nagyon szegény volna az asztrofizika.

A jegyzet tárgya az asztrofizikának egy ága, a csillaglégkörök fizikája. Mielőtt ennek tárgyalásába bocsátkozunk, tegyünk még egy tiszteletkört a pozíciós csillagászat körül, amelyet művelői nem kis büszkeséggel "precíziós csillagászatnak" neveztek 60-70 éve, ezzel is kifejezve rosszállásukat a "nagyágrendi csillagászat" szemben, ami alatt az asztrofizikát értették akkoriban. Az európai csillagászat fénykora a XVIII–XIX. sz. fordulójára esett, s mai szóval élve a fő kutatási témák az égi mechanika és a pozíciós csillagászat köré csoportosultak. Az égitestek pozíciójának tized ívmásodperces pontossággal való megmérése lehetővé tette a Naprendszer és közvetlen környéke feltérképezését. A csillagszámlálásokkal és a stellárstatisztikai módszerekkel sikerült ezt a feltérképezést kiterjeszteni, igaz itt már a pontosság nem volt olyan lenyűgöző, de ezt teljesen elfogadhatóvá tették a föltárt "irdatlan" méretek: több tízezer fényévnnyire tágult ki a horizont! A stellárstatisztika

művelői előtt ugyanaz a cél lebegett, mint közvetlen környékünk kifürkészői előtt: aprólékos munkával felépíteni csillagvárosunk (=a Tejútrendszer) modelljét, s ezzel teljessé tenni a "Világegyetem" leírását, amely a korabeli elképzelések szerint nem nyúlt túl egy tőlünk pár tízezer fényévnnyire levő gömbfelületen. Spekulatív alapon ugyan sokan – igaz inkább filozófusok, mintsem a tanult csillagászok – nemigen fogadták el azt, hogy a "Világegyetem" nem több, mint az említett kis csillagváros. A kételkedőknek azonban a pozitívizmusra hajló akkori kor csillagásza azt mondták, hogy csak a tényekről beszéljünk, arról és csak arról, amit meg tudunk figyelni, meg tudunk mérni. Ez pedig nem más, minthogy Napunk egy csillagvárosnak a közepe táján van, és ahogy haladunk a csillagváros szélé felé, még a csillagsűrűség is fokozatosan csökken, ami azt sejteti, hogy csillagvárosunk szépen belesimul a környező üres térbe.

Az imént vázolt naív világképet az asztrofizika döntötte meg, s hozott a helyére egy jóval bonyolultabbat, amely az évtizedek során bővült többször is lényeges elemekkel. Ebben a folyamatban az asztrofizikán belül kulcsszerepet játszott a csillaglégkörök megértése, mert ezáltal vált lehetővé a csillagszínképek kvantitatív kiértékelése. A megfigyelt színképek szaporodásával és azok elemzésével számos csillag fizikai paramétereit meg lehetett határozni. Innen pedig egyenes volt az út a csillagászat központi kérdése, a távolságok megállapítása felé olyan térbeli mélységekig, amelyek a pozíciós csillagászat számára elképzelhetetlenek voltak.

Mielőtt tárgyunk sűrűjébe vágunk, megemlítjük, hogy az asztrofizika két görög szóból tevődik össze, szó szerint lefordítva égitestek fizikáját jelenti. Az asztrofizikán belül beszélünk

- napfizikáról, ide tartozik a Nap belseje és légköre, valamint aktivitása,
- a Naprendszer fizikájáról: bolygók, holdak, üstökösök, bolygóközi anyag és plazma, kozmogónia a főbb altémák,
- a csillagok fizikájáról: csillagok belseje és légköre a két nagyobb vonulat ebben az alfejezetben, amihez szorosan kapcsolódnak a csillagok keletkezésének és fejlődésének problémái,
- a különleges csillagok, égitestek fizikájáról, ahová például a kettős, többszörös csillagrendszerek, szupernóvák, pulzárok, neutroncsillagok, fekete lyukak, galaxismagok, kvazárok tartoznak
- a csillagközi anyag fizikájáról,
- a galaxisok fizikájáról, szerkezetéről
- és ide vehetnénk éppenséggel a kozmológiát is, noha ez nemigen szokásos, mert a modern kozmológia tárgya nemcsak az égitestek fizikája, hanem a téridő és benne olyan anyag és sugárzások természetrajza, története, amelyek égitesteknek nem nevezhetők.

Szűkebb tárgyunk a csillaglégkörök fizikája lesz, később még pontosabban is definiáljuk egy égitest légkörét, egyelőre annyi elég lesz, hogy gáznemű égitesteknél a légkör az a rész, amelyet látunk. Vizsgálódásunk módszere szerint tárgyunkhoz lehet a megfigyelések és az elmélet oldaláról közelíteni, az elméleti munka célja, hogy modellek alkotásával visszadjuk a megfigyelések minél több részletét. A modellek paraméterei, amelyekről a későbbiekben még sok szó lesz, adják végül meg, hogy milyen a kémiai összetétel, és milyen fizikai viszonyok uralkodnak a megfigyelt égitest légkörében, a látott részében. Matematikailag, fizikailag egy nagy inverz feladattal állunk szemben, a megfigyelések olykor szegényes volta miatt gyakran kölcsönös és egyértelmű megfeleltetésről szó sem lehet, tömérdek számolás árán kapunk modellcsaládokat, amelyek bizonyos feltevéseken alapulnak, s amelyeknek néhány paramétere is van, mindezeket addig kell változtatni, amíg az egyezés a megfigyelésekkel jó nem lesz.

Jegyzetünk tárgya nem olyan alapvető diszciplína, mint a mechanika, elektrodinamika, kvantummechanika, hanem egyfajta alkalmazott tudomány a csillagászatban belül. Arról szól, ahogyan az elméleti fizika több ágát felhasználva a csillaglégkörök modelljét meg lehet szerkeszteni, s a modell birtokában hogyan lehet kiszámítani az égitestet elhagyó színeképet. Az ezután következő lépés, hogy a számított és megfigyelt színekép összehasonlításával mit lehet mondani a megfigyelt csillagra vonatkozóan. Ezért először röviden áttekintjük azokat az alapfogalmakat, amelyek a csillaglégkörök fizikai leírásához szükségesek, majd a megfigyelési módszereket, amelyek a csillagszíneképek rögzítésére szolgálnak, s matematikailag vázoljuk a modellszámítási és megfigyelési eredmények kapcsolatát. Ezután következik a csillaglégkörök modellezése, és a modellhez tartozó színekép kiszámítása. Végül egyszerűített példákkal ízelítőt adunk az alkalmazásokból.

A csillaglégkörök modellezése, a színeképek kiszámítása, valamint a tárgyunkhoz tartozó megfigyelések manapság szinte nagyiparrá váltak. Jóllehet spektrográffal felszerelt távcső és nagy számítógépek, vagyis megfelelő háttér nélkül nemigen lehet érdemben hozzászólni tárgyunkon belül a divatos aktuális kutatási témákhoz, egyáltalán nem fölösleges azon módszerek megismerése, amelyek a színeképelemzéssel, az asztrofizikai módszerek alkalmazásával a csillagászatnak ezt az ágát kvantitatív tudománnyá tették. Jegyzetünk anyagának áttanulmányozása megértetheti azokat az alapfogalmakat, amelyeket az asztrofizikának ebben az ágában dolgozó kutatók szelvében-hosszában használnak, s amelyek ismerete belépő a területre, s megsejtetheti azt is, ami témánkban zajlik a kutatás élvonalában. Ezenkívül asztrofizikai háttérrel kíván nyújtani olyan modern csillagászati témák megértéséhez, amelyekben a csillaglégkör jelenségei fontos szerepet játszanak. A teljesség igénye nélkül megemlíthetjük például a csillagok fizikai jellemzőinek (tömeg, luminozitás) és kémiai összetételének kérdését, a változócsillagok változó paramétereinek meghatározását vagy éppen a csillaghalmazok, galaxisok integrált színeképének kiszámítását.

Tárgyalásunkban ugyan külön nem hangsúlyozzuk, de a jegyzet egy lényeges hányada foglalkozik az alábbi problémával: adva van egy bizonyos geometriájú, hőmérséklet-, sűrűség- stb. eloszlású közeg, egy plazmatartomány, amelynek a szín-

képét akarjuk kiszámítani. A probléma elvileg ugyanaz, ha egy gázkisülés, ívkisülés vagy éppen egy csillag légköre ez a vizsgálandó tartomány. A jegyzet formalizmusa olyan általános lesz, hogy ezek mind beleférjenek, noha konkrét alkalmazás laboratóriumi spektroszkópiára nem lesz. Plazma-diagnosztikának is szokás nevezni a laboratóriumi alkalmazásokat, mert a megfigyelt színképből a plazma fizikai jellemzőire, kémiai összetételére lehet ezen keretek között következtetni.

A jegyzet témájában elmélyüléshez három monográfiát említünk még meg: A. Unsöld: *Physik der Sternatmosphären*, Springer, Berlin, 1968, D. Mihalas: *Stellar Atmospheres*, Freeman, San Francisco, 1978, D. és B. W. Mihalas: *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Oxford Univ. Press, New York, 1984. Nem monográfiai mélységű művek, amelyek segíthetik a témakör megértését: E. Böhm-Vitense: *Introduction to Stellar Astrophysics*, Cambridge Univ. Press, 1989, A. Unsöld, B. Baschek: *The new Cosmos: an Introduction to Astronomy and Astrophysics*, 5. kiadás, Springer, Berlin, 2001

2. fejezet

ALAPFOGALMAK

Az égitestek légkörében olyan híg elektromágneses sugárzás áramlik, amely ugyan kölcsönhatásba lép az ottani plazmával, de annak tulajdonságait számottevően nem változtatja meg. Kicsit elegánsabban ezt úgy is mondhatjuk, hogy közegünk és a rajta áthaladó fény kölcsönhatása a lineáris optika keretei között tárgyalható.

Egy elektromágneses hullámban energia terjed, az \mathbf{E} , \mathbf{H} térerősségek és a terjedési irány jobbsodrású koordináta-rendszert alkotnak. Egy tetszőleges felületen áthaladó sugárzási energia mennyiségét a különböző frekvenciájú és a különböző irányokba haladó elektromágneses hullámok Poynting-vektorainak — sugárvektorainak — összegzésével határozhatnánk meg, ennek következetes kivitelezése igen körülményes volna. Mindazonáltal fejezetünk elején a Maxwell-egyenletek alapján nagyon röviden visszaidézzük elektromágneses hullámok terjedését és elnyelődését plazmában avégett, hogy megalapozzuk a később részletesen tárgyalt fenomenologikus sugárzáselméletet, amelyben az áramlás kvantitatív tárgyalásához először a sugárzás intenzitását definiáljuk, majd ebből származtatunk le különböző mennyiségeket.

2.1. Monokromatikus elektromágneses síkhullám terjedése, elnyelődése homogén közegben

Legyen csak elektromágneses sugárzás az ϵ dielektromos állandójú, μ mágneses permeabilitású és $\bar{\sigma}$ elektromos vezetőképességű homogén térrészben, amelyben kompenzálatlan elektromos töltés nincs, ezért a négy Maxwell-egyenletből és az Ohm-törvényből,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 0, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{i} = \bar{\sigma} \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

(2.1) és (2.2) rotációjának képezésével leszarmaztathatjuk a telegráf egyenletet, ha figyelembe vesszük, hogy $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$:

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \bar{\sigma} \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \bar{\sigma} \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

(2.6) és (2.7) megoldása elektrodinamikából ismeretes, például a térben is periodikus ν frekvenciájú síkhullám megoldás komplex írásmódban az alábbi:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{i(2\pi\nu t - ks)\} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp\{i(2\pi\nu t - ks)\}. \quad (2.9)$$

(Az egyszerűség kedvéért az elektromágneses hullámunk z irányba halad, s e tengelyen mérjük a távolságot s -sel.) Behelyettesítve (2.8,2.9)-t (2.6,2.7)-be, rendezés után kapjuk az elektrodinamikából jól ismert csillapodó síkhullámot:

$$k = 2\pi\nu\mu^{1/2}(\epsilon - 2i\bar{\sigma}/\nu)^{1/2}/c \equiv 2\pi\nu\mu^{1/2}\bar{n}(1 - i\bar{\kappa})/c. \quad (2.10)$$

Ha $\bar{\sigma} = 0$, akkor $\bar{\kappa} = 0$, tehát csillapítatlan elektromágneses hullámot ír le (2.8,2.9), amelyben

$$\mu \mathbf{H}^2 = \epsilon \mathbf{E}^2, \quad (2.11)$$

amint erről (2.1,2.2-be való behelyettesítéssel meggyőződhetünk. A sugárirányra merőleges $d\sigma$ felületelemen időegységként átáramló sugárzási energiamennyiséget pedig a sugárvektor (Poynting-vektor) adja meg. Ha elhelyezünk a sugárnyaláb útjába egy θ szöggel hajó \mathbf{n} normálisú $d\sigma$ egységnyi nagyságú felületelemet, az azon áthaladó sugárzási teljesítményt az

$$(\mathbf{nS}) = |\mathbf{S}| \cos\theta = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \cos\theta = \frac{c\epsilon \mathbf{E}^2}{4\pi(\epsilon\mu)^{1/2}} \cos\theta = \nu u_\nu \cos\theta, \quad (2.12)$$

skalárszorzat adja meg, ahol ν az elektromágneses hullámunk terjedési sebessége az adott közegben ($\approx c$, mivel a közeg majdnem vákuum), $u_\nu = (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2)/8\pi$ pedig a ν frekvenciájú síkhullám energiasűrűsége. Mivel a fotonok $h\nu/c$ impulzust hordoznak, (2.12)-ből a $d\sigma$ felületelemen időegységként átáramló impulzust c -vel való osztással kapjuk meg. Ezért ha sugárzásunk vákuumban van, a haladási irányára merőleges elnyelő falra

$$P = |\mathbf{S}|/c = u_\nu \quad (2.13)$$

nyomást gyakorol.

Ha $\bar{\sigma} \neq 0$, elektromágneses hullámunk csillapodni fog, ekkor

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0| \exp\{(4\pi\nu i(t - \mu^{1/2}ns/c) - 4\pi\nu\mu^{1/2}n\bar{\kappa}s/c)\}. \quad (2.14)$$

(2.14) utalást tartalmaz arra is, ahogyan kiszámíthatjuk az ϵ , μ , $\bar{\sigma}$ anyagi állandókkal bíró közegünk $\bar{\kappa}$ (monokromatikus) abszorpciós koefficiensét. Az alkalmazott közelítés miatt (klasszikus elektrodinamika, a kvantált atomi elnyelési és fénykibocsátási folyamatok figyelmen kívül hagyása) azonban nem kapnánk túl jó egyezést az így számított és a megmért abszorpciós koefficiensek között. Mindazonáltal az asztrofizika korai szakaszában, a XX. sz. elején ezek a közelítések használatban voltak, s ha pontos választ nem is adtak, például a csillagok légkörének kvantitatív leírására használatosak voltak, s nem is vezettek túl rossz eredményekre.

Ebben a tárgyalásmódban a nemlineáris optika úgy jelentkezne, hogy az anyagi állandók (ϵ , μ , $\bar{\sigma}$) megváltoznak az áthaladó elektromágneses sugárzás hatására, vagyis \mathbf{E} , \mathbf{H} -től való függésük nem hanyagolható el. Példa erre az időtől is függő olyan intenzív sugárzás, amely ionizáció útján megváltoztatja $\bar{\sigma}$ -t, ezzel persze ϵ megváltozása is együtt jár.

A csillagok légköre nagyon híg plazmából áll, elektrodinamikai szempontból nagy vezetőképességű "vákuumnak" tekinthető ezért $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ -t vehetünk mindig, és a továbbiakban más jelölésre használjuk ezeket szimbólumokat.

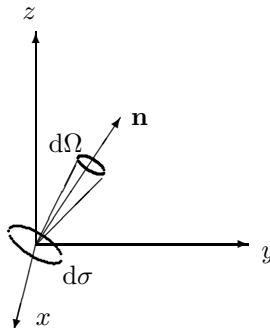
A következő szakaszokban áttérünk a fenomenologikus sugárzáselméletre, s csak alkalmanként utalunk vissza az itt felvillantott klasszikus elektrodinamikai tárgyalásmódra.

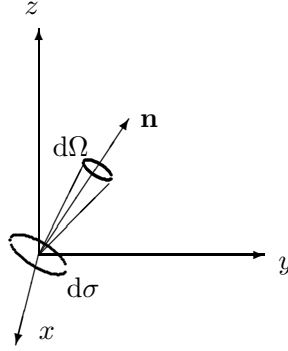
2.2. Monokromatikus intenzitás

Az xyz derékszögű koordináta-rendszerben helyezzük az \mathbf{n} normálisú $d\sigma$ felületelemet a z irányú sugárnyaládba, \mathbf{n} polárszögei legyenek θ , ϕ . Az $I_\nu(\theta, \phi)$ monokromatikus intenzitást definiálja az a $dE_\nu(\theta, \phi)$ energiamennyiség, amelyet felületelemünk az \mathbf{n} irányba mutató $d\Omega$ térszögtartományba időegységenként kisugároz az adott ν frekvencián a $d\nu$ frekvenciaintervallumba, vagyis

$$dE_\nu(\theta, \phi) = I_\nu(\theta, \phi) d\nu dt d\Omega \cos\theta d\sigma, \quad (2.15)$$

ahol $d\Omega = \sin\theta d\phi d\theta$ az elemi térszög.





2.1. ábra. 2.1. ábra

2.1. ábra

Mindezekből következik, hogy I_ν dimenziója teljesítmény/(felület \times frekvencia \times térszög). Ugyan a ν frekvencia argumentuma a monokromatikus intenzitásunk, a rövidség kedvéért indexbe írjuk, ezzel régi hagyományt követünk. Használatos még a hullámhosszegységre vonatkoztatott monokromatikus intenzitás is: I_λ , az átszámítás

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda \quad (2.16)$$

segítségével könnyen elvégezhető. (Polarizált fény esetén is felírható (2.15), ilyenkor azonban a polarizációs irányokra is tekintettel kell lennünk, és I_ν ez esetben két egymásra merőleges síkban rezgő intenzitáskomponens összege.)

Az intenzitás matematikailag nézve skaláris mennyiség; bevezetésével azt értük el, hogy nem sok-sok monokromatikus elektromágneses hullámra vonatkozó vektorvektor függvények összegével kell dolgoznunk. A Poynting-vektor *egy darab* ν frekvenciájú \mathbf{E} , \mathbf{H} térerősségű elektromágneses hullám teljesítményét adja meg, amely átáramlik egy felületen. (2.15) alapján nyilvánvaló, hogy egy z tengely irányába terjedő síkhullámhoz, vagyis sugárnyalábhoz képest θ szögben hajló σ felületen áthaladó teljesítmény

$$|\mathbf{S}|\cos\theta = \frac{c}{4\pi}|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|\cos\theta = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}^2\cos\theta, \quad (2.17)$$

itt kihasználtuk (2.11)-t és azt, hogy \mathbf{E} , \mathbf{H} és a síkhullám terjedési iránya egy jobbsodrású derékszögű koordinátarendszert alkotnak. Ebből az összefüggésből látszik I_ν és \mathbf{S} kapcsolata.

A közepes monokromatikus intenzitást az alábbi módon definiáljuk:

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_\nu(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.18)$$

Dimenziója teljesítmény/(felület \times frekvenciaegység). Izotrop sugárzás esetén, vagyis amikor I_ν nem függ θ -tól, nyilvánvalóan $J_\nu = I_\nu$.

2.3. Monokromatikus fluxus

A monokromatikus fluxust a monokromatikus intenzitás $\cos\theta$ súlyfüggvénnyel való átlagolásával kapjuk:

$$\pi F_\nu = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_\nu \cos\theta d\Omega \quad (2.19)$$

dimenziója ennek is teljesítmény/(felület \times frekvenciaegység). (A (2.19) definícióban szereplő π régi hagyomány okán szerepel.) F_ν elnevezése asztrofizikai fluxus, szoktunk még beszélni fizikai fluxusról, ennek definíciója $\mathcal{F}_\nu = \pi F_\nu = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_\nu \cos\theta d\Omega$, valamint előfordul a szakirodalomban az Eddington-féle fluxus is, amelynek definíciója $H_\nu = \mathcal{F}_\nu/4\pi = F_\nu/4$.

Izotrop sugárzás esetén $F_\nu = 0$ lesz, amint az (2.19) alapján könnyen belátható.

A monokromatikus fluxust célszerű két részre osztani:

$$F_\nu = F_\nu^+ - F_\nu^- \quad (2.20)$$

ahol

$$\pi F_\nu^+ = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_\nu \cos\theta d\Omega \quad (2.21)$$

a kifelé (a koordináta-rendszerünk z tengelye irányában) haladó sugárzási fluxus, vagyis I_ν középértéke a $\cos\theta$ súlyfüggvénnyel, mert

$$F_\nu^+ = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_\nu \cos\theta d\Omega / \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\Omega. \quad (2.22)$$

(A nevezőben lévő integrál ugyanis π , ez különben az eredete a (2.19) definícióban hagyományosan szereplő π -nek.) Hasonló módon belátható, hogy F_ν^- a befelé ($-z$ irányba, $\pi/2 < \theta < \pi$) haladó sugárzási fluxus, $\cos\theta < 0$ ilyenkor, ezért a (2.22) analógiájára definiált F_ν^- pozitív lesz, ha a $-$ előjel áll (2.20)-ben. Természetesen $F_\nu^+ = F_\nu^-$ izotrop sugárzási térben.

I_ν , J_ν , F_ν SI és cgs egységei $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{Hz})$, $\text{erg}/(\text{s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{Hz})$, rádiócsillagászatban, távoli infravörös megfigyelésekben használatos egysége a Jansky, $1\text{Jy} = 10^{-26} \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{Hz}) = 10^{-23} \text{erg}/(\text{s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{Hz})$.

2.4. Monokromatikus sugárzási energiasűrűség

Az u_ν monokromatikus sugárzási energiasűrűség egy dV térfogatelemben levő sugárzási energia mennyisége, vákuumban

$$cu_\nu = \int_\Omega I_\nu d\Omega, \quad (2.23)$$

dimenziója energia/(térfogat×frekvencia), definiálásához felhasználtuk a sugárvektorra vonatkozó (2.12) összefüggét. Izotrop sugárzás esetén

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu. \quad (2.24)$$

Egy síkhullám t' periódusidejére átlagoljuk $u_\nu(t)$ -t:

$$\bar{u}_\nu = t' \int_0^{t'} [\epsilon E^2(t) + \mu H^2(t)] dt = \frac{E_0^2}{8\pi} \quad (2.25)$$

lesz az eredmény, másrésztől (2.17) átlagolásával, (2.12) felhasználásával kapjuk, hogy

$$u_\nu = I_\nu/c, \quad (2.26)$$

amiből tehát síkhullámra

$$I_\nu = cE_0^2/8\pi. \quad (2.27)$$

2.5. Összintenzitás, fluxus, energiasűrűség

Az *összintenzitást* I_ν frekvenciára való integrálásával kapjuk:

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu, \quad (2.28)$$

ennek dimenziója teljesítmény/(felület×térshög).

Hasonló módon definiálható a *sugárzási fluxus*, amit sokszor rövidítve csak fluxusnak nevezünk,

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu, \quad (2.29)$$

ennek dimenziója teljesítmény/felület és a *sugárzási energiasűrűség*:

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu, \quad (2.30)$$

amelynek dimenziója energia/térfogat.

2.6. Monokromatikus emissziós koefficiens

Az ϵ_ν *monokromatikus emissziós koefficienst* azzal a dE_ν energiamennyiséggel definiáljuk, amelyet egy dV térfogatelem időegységenként és frekvenciaegységenként kisugároz a $d\Omega$ térshögbe:

$$dE_\nu(\theta, \phi) = \epsilon_\nu(\theta, \phi) d\nu dt d\Omega dV, \quad (2.31)$$

dimenziója energiasűrűség/(térshög×idő×frekvencia). $\epsilon(\theta, \phi)$ rendszerint izotrop, ellenpélda az izotropiára például a poláros fény kisugárzása, ami erős mágneses térrel bíró égitestekben lehet fontos.

2.7. Monokromatikus abszorpciós koeficiens, optikai mélység

A κ_ν monokromatikus abszorpciós koeficiens a dI_ν intenzitásváltozással definiáljuk, amelyet egy I_ν intenzitású sugárnyaláb szenved el ds úthosszon:

$$dI_\nu = -\kappa_\nu I_\nu ds. \quad (2.32)$$

Nyilvánvaló, hogy κ_ν dimenziója reciprokon hosszúság. Használatos még a tömegegységre és az atomszámmra vonatkoztatott monokromatikus abszorpciós koeficiens:

$$\kappa_{\nu,M} = \kappa_\nu / \rho, \quad (2.33)$$

$$\kappa_{\nu,at} = \kappa_\nu / n, \quad (2.34)$$

ahol ρ az abszorbeáló anyag tömegsűrűsége, illetve n a számsűrűsége.

$\kappa_{\nu,at}$ dimenziója felület, ez nem véletlen, hanem annak következménye, hogy az egy atomra jutó abszorpciós folyamatokat, amelyeket leírni kívánunk vele, éppen a hatáskeresztmetszettel jellemezhetjük, ami felület dimenziójú mennyiség. Értéke nagyon tág határok között lehet és a hullámhossztól is erősen függ. Jellemző számszerű értéként álljon itt, hogy szabad elektronokon a fény Thomson-szóródásának a hatáskeresztmetszete $6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2$, csillagok légkörében $\kappa_{\nu,at} = 10^{-19}$ de akár 10^{-25}cm^2 is lehet, és az abszorpciós küszöbknél $\kappa_{\nu,at}$ 1-2 nagyságrendet is változhat.

(2.32) felírásával ismét rögzíthetjük azt, hogy mit értünk lineáris optika alatt: κ_ν nem függ I_ν -től. Ez nyilván közelítés, ami a nem változó csillagok légkörében, belsejében előforduló intenzitásokon mindig jól teljesül, de esetleg egyáltalán nem teljesül a lézerefényben előforduló $I_\nu \approx 3 \times 10^9 \text{kW/m}^2$ -es (közel monokromatikus) intenzitásokon. (Összehasonlításképpen annyit, hogy a Nap légkörének külső részében az összintenzitás $I \approx 5 \times 10^4 \text{kW/m}^2$.) Változó csillagok légkörében például elképzelhető, hogy I_ν időtől való függése miatt tekintettel kell lenni κ_ν I_ν -től való függésére. Ez elvi nehézséget sosem okoz, de a numerikus megoldást igen megnehezítheti.

(2.32) felfogható úgy is, mint egy differenciálegyenlet. Megoldását nem nehéz felírni:

$$I_\nu = I_\nu(0) \exp\left\{-\int_0^s \kappa_\nu(s') ds'\right\} = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu}, \quad (2.35)$$

ezzel tulajdonképpen kiszámítottuk a monokromatikus intenzitás változását a közegünkben s hosszúságú út megtétele után. (2.35)-ben rögtön definiáltuk a τ_ν monokromatikus optikai mélységet, ami dimenziótlan szám. *Optikailag vékony*nak, illetve *vastag*nak nevezünk egy közeget aszerint, hogy $\tau_\nu \ll 1$ avagy $\tau_\nu > 1$.

Az optikai mélység az asztrofizika igen fontos fogalma, a geometriai mélység, távolság helyett használjuk. Nyilván azért hasznos fogalom, mert egy csillag légkörében, belsejében nem tudunk például méterrudakkal használható távolságskálát definiálni, τ_ν pedig kiválóan alkalmas erre, mert az anyag sugárzással szembeni

fizikai tulajdonságait jól egyesíti a geometriai távolságskálával. Mivel κ_ν nagyon erősen változhat ν függvényében, ugyanahhoz a geometriai mélységhez igen különböző optikai mélységek tartozhatnak ν értékétől függően.

(2.14)-gyel való összehasonlítás alapján nyilvánvaló, hogy az e szakaszban tárgyaltak teljes összhangban vannak a klasszikus elektrodinamikával, s hogy (2.32) nem empirikus összefüggés.

2.8. Termikus egyensúly, sugárnyomás

Termikus egyensúlyról akkor beszélünk, ha a $dV = d\sigma ds$ elemi térfogatban az elnyelt és kisugárzott sugárzási energia azonos, vagyis

$$\kappa_\nu I_\nu d\nu d\Omega d\sigma ds dt = \epsilon_\nu d\nu d\Omega dV dt, \quad (2.36)$$

I_ν csak a T hőmérséklet és a ν frekvencia függvénye; ez a Kirchhoff-törvény. Max Planck 1900-ben jött rá arra, hogy

$$\frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} = J_\nu(T), = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (2.37)$$

illetve hullámhossz egységekre vonatkoztatott monokromatikus intenzitás használata esetén $\nu = c/\lambda$ és $d\nu = -cd\lambda/\lambda^2$ miatt

$$J_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1}. \quad (2.38)$$

(Mivel termikus egyensúlyban I_ν izotrop, ezért (2.37)-ban $I_\nu (= J_\nu)$. Igen gyakran szokták jelölni a Planck-függvényt $B_\nu(T)$ -vel, s szokták Kirchhoff–Planck-függvénynek is nevezni.) Üregsugárzásnak, feketetest sugárzásnak, illetve hőmérsékleti sugárzásnak is szokták nevezni a (2.37,2.38) által leírt sugárzást. A legkönnyebben úgy állítható elő, hogy egy üreget egyenletesen hevítünk, s egy kicsi lyukon keresztül tanulmányozzuk benne az intenzitáseloszlást, innen származik az üregsugárzás elnevezés. A feketetest sugárzás elnevezés eredete az, hogy termikus egyensúly akkor tud kialakulni a sugárzási tér és az edény között, ha az edény fala minden sugárzást elnyel, majd maradéktalanul visszasugároz, ez pedig éppen az abszolút fekete test tulajdonsága. A hőmérsékleti sugárzás elnevezés arra utal, hogy minden $T > 0$ hőmérsékletű test sugároz, mert termikus egyensúly fennállásakor rendszerünk a maximális entrópia állapotában van, s ilyenkor a rendszer energiája egyenletesen oszlik el a lehetséges szabadsági fokok között, a hőmozgás kinetikus energiája és az elektromágneses hullámok formájában jelenlévő energia között. (Az itt mondottak egyik triviális következménye, hogy ha egy felhevített üregbe behelyezünk egy testet, s a termikus egyensúly beállítását megvárjuk, akkor a test eltűnik szemünk elől, mert a kontúrjai mentén ugyanúgy csak I_ν -t látjuk, mint az üreg más pontjaiban.) Mivel

(2.37) anyagi minőségtől független, s a csillagok legkülső rétegeiig igen jó közelítés, asztrofizikában nagyon széles körben alkalmazzuk.

Ha $h\nu/kT \ll 1$ sorfejtéssel kapjuk a Rayleigh–Jeans-közelítést:

$$J_\nu = 2\nu^2 kT/c^2, \quad (2.39)$$

$$J_\lambda = 2kTc/\lambda^4, \quad (2.40)$$

míg nagy fotonenergiákon ($h\nu/kT \gg 1$) a Wien-közelítés érvényes:

$$J_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (2.41)$$

(2.37)-ből a Wien-féle eltolódási törvényt deriválással kapjuk:

$$\frac{\partial J_\lambda}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.42)$$

bevezetve az $x = hc/k\lambda T$ változót kapjuk ebből, hogy

$$e^x(5-x) - 5 = 0. \quad (2.43)$$

Ez transzcendens egyenlet, melynek két gyöke van: $x_1 = 0$ nem fizikai megoldás, és $x_2 = 4,965\dots$, amiből

$$\lambda_{\max} T = hc/kx_2 = 2,897 \times 10^6 \text{ nm} \times \text{fok} \quad (2.44)$$

(2.37) ν szerinti integrálásával pedig a Stefan–Boltzmann-törvényt adódik: a $d\sigma$ felületelem által az egyik hemiszférába kisugárzott fluxus

$$\pi F^+ = \int_0^\infty d\nu \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \cos\theta d\Omega \quad (2.45)$$

$$= \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = aT^4 = 5,672 \times 10^{-8} T^4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{fok}^4}, \quad (2.46)$$

ahol a a Stefan–Boltzmann konstans, cgs egységekben $5.672 \times 10^{-5} \text{ erg}/(\text{scm}^2 \text{fok}^4)$. Megjegyezzük még, hogy fizika tankönyvekben az energiasűrűségekre szokták levzetni a Stefan–Boltzmann-törvényt (vagyis $u = (4\pi/c) \int_0^\infty d\nu u_\nu \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi$), ilyenkor az a konstans értéke kicsit más. Asztrofizikában azért kedvelik inkább a (2.46) formát, mert az egységnyi felület által a féltérbe kisugárzott fluxus közvetlenül kapcsolódik egy csillag T_e effektív hőmérsékletéhez:

$$L = 4\pi R^2 \pi F^+ = 4\pi R^2 a T_e^4, \quad (2.47)$$

ahol L a csillag luminozitása, R pedig a sugara.

(2.47) az effektív hőmérséklet *definíciója*, a légkörmodell nagyon fontos paramétere, de nem tényleges hőmérséklet a csillag légörében. Az optikai mélységtől függő

tényleges hőmérséklettel rendszerint megegyezik a légkör egy helyén. Ez a hely a modelltől függ.

Az üregsugárzás izotrop, az üreg fala által elnyelt fotonok vissza is sugárzódnak a termikus egyensúly miatt, ezért az üreg falát reflektálónak tekinthetjük. Az üreg falára tehát a sugárzás nyomást gyakorol, amelynek értékét vagy a Maxwell-féle feszültségtenzorból származtathatjuk le, vagy az alábbi szemléletes megfontolással. Az üregebe zárt elektromágneses (sík)hullámok essenek be valamilyen θ szög alatt a fal $d\sigma$ felületelemére a $d\Omega$ térszögintervallumon belül amelyen így időegységenként $|\mathbf{S}|\cos\theta/c$ impulzus nyelődik el, majd visszاسugárzás miatt még egyszer ennyit kap a fal. A felületre merőleges komponens ennek $\cos\theta$ -szorosa, a felülettel párhuzamos komponensei az impulzusnak pedig kiejtik egymást $2|\mathbf{S}|\cos^2\theta/c$ térszögre való integrálása során, tehát a ν frekvenciájú elektromágneses hullámok által az üreg falára gyakorolt nyomás (2.17) felhasználásával

$$P(\nu) = \frac{2}{c} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_\nu \cos^2\theta \sin\theta d\phi d\theta = \frac{4\pi}{c} \frac{I_\nu}{3} = \frac{u_\nu}{3}. \quad (2.48)$$

Az össznyomás pedig (2.37,2.46) felhasználásával

$$P = \int_0^\infty \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{3c^3(e^{h\nu/kT} - 1)} = \frac{4aT^4}{3c} = 2,521 \times 10^{-14} T^4 \text{Pa}. \quad (2.49)$$

(Az SI és a cgs egységek: $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$, $\text{dyn}/\text{cm}^2 = 0.1\text{Pa}$. Használatos még: $1\text{atm} = 10^5\text{Pa} = 10^6\text{dyn}/\text{cm}^2$.)

Mint említettük, az üregsugárzás a maximális entrópia állapotának felel meg. A termodinamika szellemének megfelelően csupán tényként megállapíthatjuk, de nem kérdezhetjük meg, hogy milyen mikrofolyamatok: milyen elemi ütközési, sugárzási és fényelnyelési folyamatok alakították ki ezt az egyensúlyt. Részletekbe bocsátkozás nélkül szeretnénk itt előrebocsátani, hogy az asztrofizika jelenleg teljesen lezáratlan fejezete az, hogy mekkora sűrűségű és hőmérsékletű plazma tekinthető már termikus egyensúlyban lévőnek. Kvalitatív megfontolásokból nyilvánvaló, hogy csekély sűrűségeken, tetézve esetleg alacsony hőmérséklettel, nem történik elegendő ütközés a plazma elemei — atomok, ionok, elektronok, fotonok — között. Ebben a tartományban az ekvipartíció, a Kirchhoff–Planck-függvénnyel azonos I_ν nem tud kialakulni. Kvantitatív tárgyalás itt csak az elemi kölcsönhatások egyenkénti figyelembevételével lehetséges, ha a plazma sugárzását akarjuk leírni. E körülmények között a (2.37,...) összefüggések nem érvényesek.

2.9. Négy alkalmazás

2.9.1. Először definiáljuk tantárgyunk tárgyát, az égitest légkörét.

Ha optikailag vékony a légkör, mint például a Földé bizonyos (látható) hullámhosszakon, a légkör természetesen a szilárd kéreg és a világűr közti rész. Ha optikailag vastag

egy légkör, és nincs szilárd kéreg vagy óceán egy gáznemű légkör alatt, tehát nincs egy olyan fázisátmenet a növekvő optikai mélységgel, amely természetes határt szab, akkor a legkézenfekvőbb légkörnek nevezni azt a tartományt, amelyen belül $0 \leq \tau_\nu \leq 3$ egy bizonyos jellemző ν frekvenciára. (2.35) értelmében ugyanis ezt a tartományt látjuk, az adott frekvencián az ez alatti rétegekből ($\tau_\nu > 3$) felemelkedő sugárzásnak már több, mint 95 százaléka nem érkezik meg az égitest felületére, hanem elnyelődik, és természetesen nem marad ott, hanem újra kisugárzódik a légkör $0 < \tau_\nu < 3$ tartományában, s ennek a sugárzásnak már számottevő hányada hagyja el az égitest légkörét. Végezetül meg kell még állapodnunk abban a frekvenciában, amelyen definíciókat értjük, mert τ_ν igen erősen függhet a frekvenciától. A legésszerűbb egy olyan frekvenciát választani, amely közel esik a csillag F_ν^+ -ának maximumához (ezt a Wien-törvény alapján nem nehéz megtalálni), s ahol nincs színképvonal. A Naphoz hasonló sárga csillagoknál például $\lambda_{\max} \approx 2,897 \times 10^6 \text{ nm} \times \text{K}/5400\text{K} \approx 540 \text{ nm}$, ez a látható fényből nagyjából a sárga hullámhossza, ez a Johnson féle fotometriában a V sávba esik.

Itt említjük még meg, hogy pusztán empirikus alapon a Nap légkörét három részre osztjuk fel: fotoszféra, kromoszféra, korona. (Ez a felosztás más csillagok légkörében is nagyjából így helyes.) Az abszorpciós színkép a fotoszférából származik, ennek vastagsága például a Napon mintegy 400 km, vagyis látható fényben a vonalakon kívüli frekvenciákon körülbelül ekkora távolságon válik optikailag vastagga a fotoszféra anyaga. A fotoszférában gyakorlatilag termikus egyensúly uralkodik, nagy kiterjedésű termikus plazma van a fotoszférában. Ez alatt azt értjük, hogy a hőmérséklet gradiense igen kicsi, 1000 K/100 km a nagyságrendje, míg egy ívkisülés aligha nevezhető termikus plazmának, mert ebben 1000 K/cm a hőmérséklet gradiense a nagyságrendje. A fotoszféra fölött van a kromoszféra, amelyből emisszióban jönnek a fotoszféra vonalai, vastagsága körülbelül 12000 km. A koronában igen magas a hőmérséklet, 10^6 K nagyságrendjébe esik, mérete 10^6 kilométerekkel jellemezhető, s belőle többek között sokszorosan ionizált elemek színképvonalai is jönnek. A korona folytonosan megy át az interplanetáris plazmába, amelyet már nem tekintünk a naplégkör részének, noha a Naptól származó plazmaáramok alkotják. A kromoszféra és a korona a folytonos optikai színkép frekvenciáin, valamint még egyes erős színképvonalak hullámhosszain is optikailag vékony. A fotoszférától kifelé már jelentős eltérések vannak a termikus egyensúlytól. Ezek az adatok tipikusnak tekinthetők egy fősorozati sárga törpecsillagra.

A forróbb fősorozati csillagoknál (pl. Sirius, $T_e \approx 10^4$ K) a légkör mérete ($0 < \tau < 3$) körülbelül 3000 km, óriás és szuperóriás csillagokra ez $O10^4$, illetve $O10^6$ kilométerig nő, és egyre kevésbé tekinthető stabil, hidrosztatikus rétegződésnek.

Az interplanetáris plazma szuperszónikus részecskeáramokkal indul, majd valahol messze a Pluto pályán túl szubszónikusá alakul, s találkozik végül az interstelláris anyaggal. Ennek színhelyét heliopauzának nevezzük. Az interplanetáris plazma kapcsán szoktunk beszélni úr-időjárásról, lévén hogy a plazmaáramok olyasféle helyzetet teremtenek az interplanetáris térben, mint a szelek a földi légkörben.

2.9.2. A Planck-függvény alkalmazhatósága a csillagok légkörében

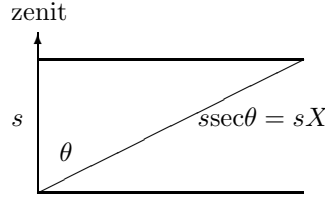
A Planck-függvény – (2.37) – igen jó közelítés a csillagok légkörében, $\tau_\nu = 0$, tehát kifelé haladva egészen kis optikai mélységekig. Ennek okát (2.35) alapján érthetjük meg: ahol a légkör optikailag vastag, az abszorpciót okozó rétegek ugyanúgy, mint az üregbe a fedő, bezárják a sugárzást, a hőmérséklet gradiense igen kicsi, ezért a termikus egyensúly gyorsan kialakul. Ezért a csillaglégkör aljáig feltétlenül jó közelítés (2.37). A csillaglégkörben aztán a sugárzás nagymértékben izotrop, F^+ és F^- csak csekély mértékben térnek el egymástól az egészen kis optikai mélységekig, ezért az erős színekvonalak frekvenciatartományától eltérő frekvenciákon (2.37) szintén igen jó lesz. Később pedig be fogjuk látni, hogy (2.37) feltevésével még a vonalas színeképet is meglehetősen jól lehet visszaadni, noha (2.37) semmiféle anyagi minőségtől függő dologra, például színekvonalra utalást definíció szerint nem tartalmaz.

2.9.3. Légköri extinkció

Az s vastag földi légkörön θ zenittávolságban áthaladó monokromatikus sugárnyaláb intenzitása (2.35) szerint gyengül:

$$I_\nu(\theta) = I_\nu^{(s=0)} e^{-\kappa_\nu s X}, \quad (2.50)$$

ahol $I_\nu^{(s=0)}$ zérus levegőtömegnél (vagyis $\tau_\nu = \kappa_\nu s = 0$ optikai mélységnél) megfigyelhető intenzitás (fluxus).



2.2. ábra

Feltételeztük, hogy a légkör homogén, vagyis κ_ν azonos a légkör bármely pontján. (2.50)-t elosztjuk $I_\nu^{(s=0)}$ -val, majd $-2, 5$ -szeres logaritmusának kiszámításával megkapjuk a csillag látszó monokromatikus magnitúdójának változását θ függvényében:

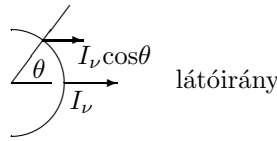
$$m_\nu(\theta) = kX + m_\nu^{(s=0)}, \quad (2.51)$$

ahol $1 < X = \sec\theta < \infty$ a magnitúdómérések redukálásából ismert levegőtömeg, $X = 1$ a zenitben, $X = 2$ 60 fokos zenittávolságban stb, és $X = \infty$ a horizont felé, $k = 2, 5s\kappa_\nu$ lge. (2.50), illetve (2.51) az extinkció egyszerűsített modellje. Amikor egy égitestet a földi légkör aljáról figyelünk meg, de nem érjük be magnitúdókkal, (2.50) szerint kell kiszámítani $I_\nu^{(s=0)}$ -t, azt az intenzitást, illetve fluxust, amely égitestünkből megérkezik a földi atmoszféra felső határához, ezt

ugyanis a távolsággal való gyengülésen kívül már csak a csillagközi fényabszorpció módosította, ha van ilyen az égítéstünk irányában. A földi légkör fölé lőtt űreszközök műszerei természetesen lehetőséget adnak $I_\nu^{(s=0)}$ közvetlen mérésére is.

2.9.4. Egy csillag fluxusa

Egy csillagról általában csak F_ν^+ -t mérhetjük meg, mert a csillag felénk forduló hemiszférájára éppen a $\cos\theta$ súlyfüggvénnyel kell integrálnunk $I_\nu(\theta, \phi)$ -t, amint erről a 2.3. ábra alapján könnyen meggyőződhetünk. (2.47)-ben ezt már föl is használtuk az effektív hőmérséklet definiálásakor.



2.3. ábra

A Nap esetében $I_\nu(\theta, \phi)$ -t közvetlenül is tanulmányozhatjuk, mert annak légkörébe különböző szögek alatt tudunk belátni. Fedési kettősök tanulmányozása átmenetet képez ebből a szempontból, mert a fedés során F_ν változásának megfigyelése lehetőséget nyújt $I_\nu(\theta, \phi)$ rekonstruálására, lévén, hogy (2.22)-ben az integrálás határait a fedési geometria szabja meg. Ha a csillag alakja torzult – például gyors tengelyforgás miatt – $I_\nu(\theta, \phi)$ jelentősen függhet a θ, ϕ szögektől, míg gömbszimmetrikus, polarizálatlan fényt kibocsátó foltmentes csillagnál $I_\nu(\theta, \phi)$ izotropnak vehető a $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ tartományban.

Végül megjegyezzük, hogy (2.50,2.51) természetesen érvényes akkor is, ha F_ν -t írunk I_ν helyére.

2.10. Néhány fizikai állandó és egység

Mivel a cgs egységrendszer jóval az SI rendszer előtt kialakult, és fizikailag teljesen következetes egységrendszert képez, mi is fogjuk használni jegyzetünkben. Az átszámítás különösebb nehézséget nem jelent. Megjegyezzük, hogy az asztrofizikai szakirodalomban nemcsak a cgs egységrendszert használják széles körben, hanem az olyan különleges egységeket is, mint az $\text{Å} = 0,1\text{nm}$ a hullámhosszra vagy a hullámszám: $\text{cm}^{-1} = 1,2395 \times 10^{-4}\text{eV} = 1,9856 \times 10^{-16}\text{erg}$ az energiára. Ez utóbbit spektroszkópusok használják, definiáló egyenlete $E = h\nu = hc \times \text{hullámszám} = hc/\lambda$, dimenziója nyilván reciprok hosszúság.

Megadjuk még néhány fontosabb fizikai állandó értékét. (Planck-állandó, fénysebesség, az elektron töltése, tömege, a proton tömege, Boltzmann-állandó, univerzális gázállandó, gravitációs állandó, parszek)

$$h = 6,626 \times 10^{-27} \text{erg s} = 6,626 \times 10^{-34} \text{J s}$$

$$c = 2,9979 \times 10^{10} \text{cms}^{-1}$$

$$e = 4,803 \times 10^{-10} \text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}$$

$$m_e = 9,108 \times 10^{-28} \text{g}$$

$$m_p = 1,67 \times 10^{-24} \text{g}$$

$$k = 1,3806 \times 10^{-16} \text{erg/fok} = 1,3806 \times 10^{-23} \text{J/fok} = 8,64 \times 10^{-5} \text{eV/fok}$$

$$\mathcal{R} = 8,31 \times 10^7 \text{ erg}/(\text{mól} \times \text{fok}) = 8,31 \text{ J}/(\text{mól} \times \text{fok})$$

$$G = 6,67 \times 10^{-8} \text{g}^{-1} \text{cm}^3 \text{s}^{-2}$$

$$1 \text{pc} = 3.08 \times 10^{13} \text{km}$$

3. fejezet

AZ ALAPFOGALMAK ÉS A MEGFIGYELÉSEK KAPCSOLATA

3.1. Disztorzió

Akár $I_\nu(\theta, \phi)$ -t, akár F_ν^+ -t figyeljük meg, eszközünk eltorzítja azokat. A $D(\nu - \nu')$ disztorziós függvénnyel jellemezzük a torzítást: a megfigyelt w_ν monokromatikus teljesítmény az S felületű tükörrel felszerelt távcsövünk fókuszpontjában

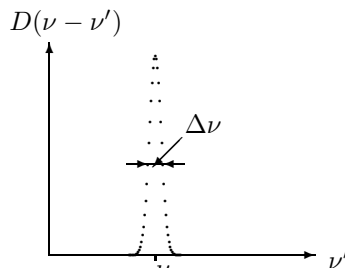
$$w_\nu = S \int_0^\infty F_{\nu'}^+ D(\nu - \nu') d\nu' R_*^2 / d^2, \quad (3.1)$$

és $D(\nu - \nu')$ -t természetesen egyre kell normálni:

$$\int_0^\infty D(\nu - \nu') d\nu' = 1, \quad (3.2)$$

R_* a csillag sugara, d a távolsága, az esetleges intersztelláris abszorpciót elhanyagoltuk. Ideális esetben $D(\nu - \nu')$ a Dirac-féle deltafüggvény volna, a gyakorlatban azonban be kell érnünk azzal, hogy a távcsövünk, s a hozzá csatolt diszperziós elemek — rács, prizma, szűrő — valamint az w_ν rögzítésére szolgáló fotolemez, fotokatód vagy elektronikus rögzítő (pl. töltéscsatolt eszköz, azaz CCD matrix) kissé eltorzítják a beérkező I_ν -t, F_ν^+ -t. Ezt a torzítást első közelítésben $D(\nu - \nu')$ $\Delta\nu$ félszélességével jellemezhetjük az adott ν frekvencián a 3.1 ábra szerint, $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-3} - 10^{-6}$ szokott lenni. (Angol nyelvű szakirodalomban $\Delta\nu$ -t, illetve az annak megfelelő $\Delta\lambda$ -t gyakran FWHM-nek rövidítik — full width of half magnitude.)

Figyeljük meg, hogy a disztorzió egy ν frekvenciához (λ hullámhosszhoz) "hozzákeveri" az egyéb frekvenciákról (hullámhosszokról) származó monokromatikus intenzitást, illetve fluxust.



3.1. ábra

3.2. Fotometria, spektroszkópia

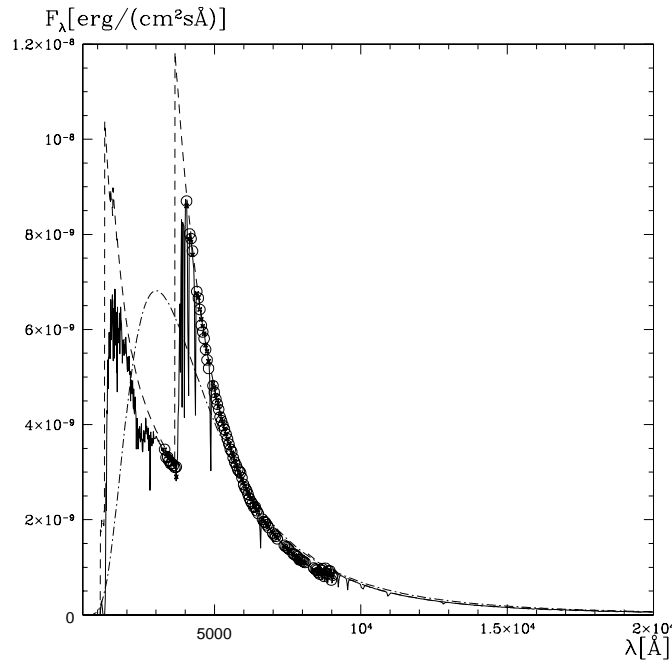
A tantárgyunk szempontjából fontos megfigyelések fotometriára és spektroszkópiára oszthatók föl.

A fotometriákat az egyre normált $S_x(\lambda)$ szűrőfüggvényeikkel jellemezzük, ahol x helyén a sáv megjelölése áll, például a Johnson-féle $UBVRI$ fotometria esetén U , stb., és a frekvencia helyett általában hullámhosszak használatosak $S_x(\lambda)$ megadásakor. Az adott sávban az égitest látszó fényessége magnitúdóban kifejezve

$$U = -2,5 \log \int_0^{\infty} S_U(\lambda) w_{\lambda} d\lambda + U_0, \quad (3.3)$$

ahol U_0 a magnitúdóskála nullpontját rögzíti és (3.3) alapján nem ütközik semmi nehézségbe a többi szín és a színindexek — $U-B$, $B-V$ stb — szabatos definiálása. Előfordulhat, hogy külön szűrőt nem teszünk be, ilyenkor a szem vagy a fényérzékelőnk, valamint a földi légkör és a távcső áteresztési függvénye szabja meg az észlelt magnitúdókat.

Nem árt hangsúlyozni, hogy $S_x(\lambda)$ a szűrő és az egyéb elemek, fotokatód vagy töltéscsatolt eszköz – CCD, tükrök stb, tehát fényútban minden elem együttes szűrő hatását foglalja magában. Ezért $S_x(\lambda)$ -t például a változó légköri extinkció színtüggése időtől függően torzíthatja, különösen erősen például a Johnson-féle U sávban, de a többi sávban is hozhat be szisztematikus hibát százalékos szinten. A fotokatód hatására pedig példa a galliumarzenid fotokatód: ennek érzékenységi függvénye 1000nm körül gyakorlatilag nullára csökken, a CCD csipeké viszont körülbelül 1300nm-ig terjed, ezért az I_C infravörös sávban a fotometriai rendszer jó létrehozása nem egyszerű feladat, mert a kereskedelemben kapható olcsóbb infravörös szűrők átengedik a fényt 1000 és 1300nm között.



3.2. ábra. Körök: a Vega megfigyelt \mathcal{F}_λ fizikai fluxusa $X = 0$ levegőtömegnél. (Forrás: *Astronomy and Astrophysics*, 61, 679, 1977.) Keresztek: A Kurucz-féle $T_e = 9650$ K, $\log g = 3.95$ (vagyis $g = 89, 13 \text{ms}^{-2}$) légkörmodell (forrás: <http://www.cfaku5.cfa.harvard.edu>) számított fizikai fluxusa $\times 6, 33 \times 10^{-17}$ interpolálva a megfigyelési hullámhosszakra. Szaggatott vonal: a számított \mathcal{F}_λ a kontinuumban, vagyis $\mathcal{F}_\lambda^{(c)}$. Kihúzott vonal a teljes fluxus, vagyis a folytonos és a vonalas színkép együttesen: $\mathcal{F}_\lambda^{(l+c)}$. Szaggatott vonal pontokkal: Planck-görbe $\times 6.33 \times 10^{-17} \pi$, vagyis (2.38)-ből számított \mathcal{F}_λ^+ fizikai fluxus $T = 9650$ K hőmérsékletre.

A nullpontok tényleges definiálása összetett feladat. Például az $UBV(RI)_C$ rendszerben a rendszer definiálásakor, majd későbbi módosítása után a megállapodás az lett, hogy a Vega (α Lyrae) vizuális magnitúdója legyen 3.2. $V = 0.030$, színindexei pedig legyenek $U - B = -0.005$, $B - V = -0.003$, $V - R_C = -0.009$, $V - I_C = -0.005$. (A C index a Kron-Cousins rendszerre utal.) Abszolút spektrofotometriával megmérték a Vega \mathcal{F}_λ fluxusát a földi légkör fölött, majd kiszámították a (3.3) típusú integrálokat mindegyik sávra, $\mathcal{F}_U = 2.16 \times 10^{-7} \text{erg/scm}^2$, $\mathcal{F}_B = 3.17 \times 10^{-7} \text{erg/scm}^2$, $\mathcal{F}_V = 1.82 \times 10^{-7} \text{erg/scm}^2$, $\mathcal{F}_{R_C} = 1.04 \times 10^{-7} \text{erg/scm}^2$, $\mathcal{F}_{I_C} = 5.87 \times 10^{-8} \text{erg/scm}^2$ adódott, majd például ebből $V_0 = 0.030 + 2, 5 \log \mathcal{F}_V$ adja a V sáv nullpontját.

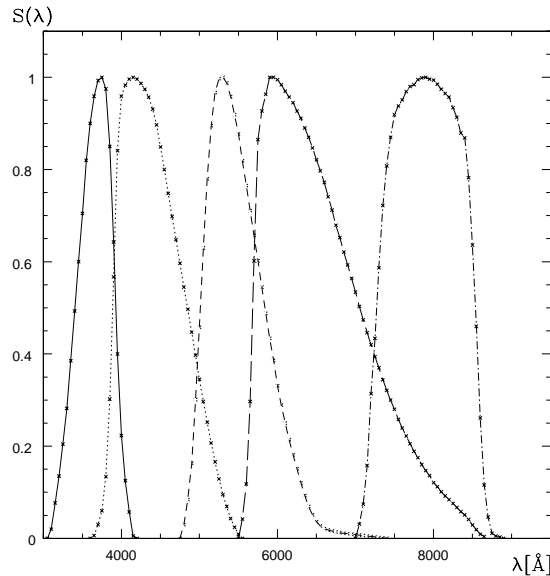
A 3.2. ábra mutatja a Vega megfigyelt fizikai fluxusát, valamint a $T_e = 9650$ K, $\log g [\text{cms}^{-2}] = 3.95$ ATLAS légkörmodell Földnél megfigyelhető fizikai fluxusát. (Ez

utóbbi úgy adódik, hogy a Vega távolságához tartozó $\vartheta^2 = (R/d)^2 = 6,33 \times 10^{-17}$ -es gyengítéssel kell megszorozni a modell $\mathcal{F}_\lambda(R)$ fluxusát, mert az intersztelláris abszorpció 8 pc távolságon elhanyagolható, ezért a Vega luminozitása a Földnél d sugarú gömbön oszlik el. A Vega teljesítménye $4\pi R^2 \mathcal{F}(R)$, ez a teljesítmény d távolságban $4\pi d^2 \mathcal{F}(d)$, a kettő egyenlőségéből adódik a $\vartheta^2 = (R/d)^2$ -es gyengítő faktor.¹⁾ Figyeljük meg a jó egyezést, a kereszték a körökön belül vannak. Az összehasonlítás kedvéért egy $T = 9650\text{K}$ -es Planck-görbét is berajzoltunk, szintén megszorozva R/d^2 -es gyengítéssel. Infravörösben jó az egyezés a megfigyelt fluxussal, de a Balmer- és Lyman-ugrásnál, illetve az egész $\lambda < 6000\text{\AA}$ tartományban igen jelentős az eltérés.

A 3.3. ábra az $UBV(RI)_C$ rendszer S_λ szűrőfüggvényeit mutatja, az ezekkel képzett $w_\lambda = \mathcal{F}_X$, $X = U, B, \dots$ fizikai fluxusokat és a nullpontokat a (3.3) definíció szerint számoltuk ebben a bekezdésben.

Jó fotometria az, amelyet az $S_x(\lambda)$ szűrőfüggvényekkel definiáltak, például ilyen a Strömgen-féle *wby* fotometria. Szűrőfüggvényeinek elhelyezése is olyan, hogy különböző színindexek képzésével a lehető legtöbb asztrofizikai információt kapjuk. Az igen széles körben elterjedt Johnson-féle UBV fotometria nem ilyen, mert azt a standardcsillagaival definiálták: bizonyos csillagok színindexeit megmérték igen sokszor ugyanazzal a műszerrel ugyanazon helyről, utalásokat ugyan adtak arra vonatkozóan, hogy milyen fotokatóddal és szűrőkombinációkkal lehet jól megvalósítani az UBV rendszert, de az alapállás az, hogy a standard színrendszert kell létrehozni olyan eszközökkel, amilyenekkel lehet, s eredetileg a szűrőfüggvényeket meg sem mérték. Ez az álláspont az elméleti asztrofizika szempontjaira nem sok tekintettel van: célunk ugyanis az, hogy a szűrőfüggvények felhasználásával kiszámíthassuk például egy modell színindexeit, de ez az $S_x(\lambda)$ -k ismerete nélkül nem megy. Az UBV rendszert definiáló fotométer kiselejtezése után évekkel, hosszadalmas munka árán tudták csak megállapítani mégis a rendszer szűrőfüggvényeit. E munkák során aztán kiderült, hogy az U sávot a rövidhullámú oldalon nem a szűrőfüggvény, hanem a földi légkör vágja le, ezért helyről helyre kicsit más lesz az U szín, főleg az obszervatórium tengerszint feletti magasságától függően! Előnye viszont ennek a fotometriai rendszernek, hogy megvalósítása egyszerű, és sok csillagot lehet vele elérni. Széles körű elterjedtsége miatt asztrofizikai szempontokat is figyelembe vevő megreformálásáról nemigen lehet álmodni.

¹A Vega távolsága $d = 8.28 \text{ pc} = 2.56 \times 10^{14} \text{ km}$, szögsugara $\vartheta = R/d = 7.95 \times 10^{-9}$. Egyébként a Vega sugarára $R = 2.03 \times 10^6 \text{ km} = 2,9R_\odot$ adódik így.



3.3. ábra: Az $UBV(RI)_C$ fotometriai rendszer normálatlan szűrőfüggvényei, balról jobbra U , B , V , forrás: *Astronomy and Astrophysics* 70, 555, 1978, R_C , I_C , forrás: *Publ. Astr. Soc. Pacific*, 95, 480, 1983

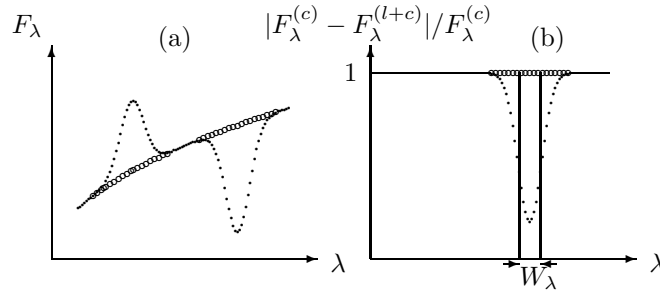
Beszélni szoktunk keskenysávú, közepes sávszélességű, szélessávú fotometriákról aszerint, hogy (3.3)-ban $S_x(\lambda)$ $\Delta\lambda$ félszélessége 1, 10, 100 nm nagyságrendjébe esik. A Strömgren-féle *uvby* fotometria közepes sávszélességű: $\lambda_2 - \lambda_1 \approx 20$ nm, míg az *UBVRI*, vagy az *RGU* fotometria szélessávú körülbelül 100 nm széles sávokkal. Az ebbe a kategóriába tartozó fotometriai rendszereket szűrőkkel jól meg lehet valósítani. A keskenysávú fotometriák hatékony megvalósításához már diszperziós elem (rács vagy prizma) kell, és a sávok kiválasztása mechanikus úton történik: kapukkal vagy újabban CCD matrixok megfelelő elhelyezésével.

Számos fotometriai rendszer létezik, említésre méltó, hogy az *RGU* rendszert fotografikus rögzítéshez dolgozták ki, ezért ma már eltűnt a használatból, míg például az SDSS-hez (Alfred Sloan Digital Sky Survey) egy külön szűrőrendszert konstruáltak. Ez az $u'g'r'i'z'$ rendszer, amihez az abszolút kalibrációt szintén megcsinálták², tehát a magnitudo–fizikai fluxus konverzió nem jelent problémát.

Az asztrofizika szempontjából fontos információkat a színek hordozza. A spektrográfok szolgálnak ennek, vagyis w_λ -nak rögzítésére. A színekben belül beszélünk kontinuumról és vonalokról, ez utóbbiak lehetnek abszorpciósak, vagy emissziósak, és természetesen spektrográfunk felbontóképességétől függően esetleg bizonyos gyenge vonalak beleolvadhatnak a kontinuumba, vagy összeolvadhatnak egymással: ez utóbbit az angol elnevezés után *blend*-nek nevezzük. A vonalakat a hullámhosszuk-

²AJ 123, 2121, 2002

kal és profiljukkal jellemezzük. A vonalprofil helyett közelítő jellemzésre használhatjuk a W_λ ekvivalens szélességet, amit a 10.2. alfejezetben matematikailag is definiálunk majd. Mértékegysége a mÅ, szemléletes definíciója a 3.4. ábráról olvasható le. Értéke annak az egységnyi magasságú téglalapnak a szélessége, amelynek területe abszorpciós vonal esetén a vonal által a kontinuumból kitakart területtel, emissziós vonal esetében pedig a vonal által a kontinuumhoz hozzáadott területtel egyezik meg.



3.4. ábra. (a): Pontozott vonal: a megfigyelt F_λ . ($F_\lambda^{(c)}$ a kontinuumban, $F_\lambda^{(l+c)}$ a vonalakban.) Körök: az extrapolált kontinuum. (b): Az (a)-ban szereplő abszorpciós vonal W_λ ekvivalens szélességének szemléltetése.

A disztorzió hatása a a nagydiszperziós spektroszkópián belül lehet számottevő, mert módosíthatja a vonalprofil.

Mind a fotometriának, mind a spektroszkópiának négy nagyobb korszaka volt: kezdődtek a vizuális észleléssel, folytatódtak a fotografikus, majd fotoelektromos rögzítési módszerekkel, ma pedig ezek egyre komolyabb vetélytársa az elektronikus rögzítés. A vizuális megfigyelések hibájáról nehéz nyilatkozni. A fotografikus úton w_λ mintegy 10% pontosan mérhető meg, a legnagyobb gond és hibaforrás a fotografikus denzitás átszámítása monokromatikus intenzitásba, fluxusba. A fotoelektromos megfigyelésekkel a százalékos pontosságot nem nehéz elérni, jó asztróklimájú helyeken jó fotométerrel az ezrelékes pontosság sem lehetetlen. A jelenleg is fejlődő elektronikus rögzítési technikákban a százalékos pontosság elérése nem okoz különösebb gondot, s az ezrelék elérése sem lehetetlen. Magnitúdóba átszámolva ezek a számok 0,1–0,01–0,001 pontosságot jelentenek. Mindezekből következik, hogy F_λ^+ vagy $I_\lambda(\theta, \phi)$ kiszámítására irányuló törekvéseinkben a százalékosnál, ezrelékesnél nagyobb pontosságra nincs szükség.

Pár szót még arról, hogy az asztrofizika kezdetét onnan számíthatjuk, amikor Joseph von Fraunhofer (1787-1826) áttanulmányozta a Nap színekében föllelhető színekvonalakat, ma Fraunhofer-vonalaknak nevezzük ezeket. Ekkoriban a csillagászok égi mechanikával és pozíciós csillagászzal foglalkoztak és érdeklődésük főleg arra terjedt ki, hogy hol van az égitest, és mi kormányozza a mozgását. Ez utóbbi kérdésre szinte teljes választ tudunk ma adni, és a csillagászok érdeklődése a XX. században egyre inkább az asztrofizika felé fordult: mit lehet kihámozni a megfigyelt w_λ -ból az egyes égitestek természetrajzára. A XX. század utolsó ne-

gyedében szorult háttérbe az egyes égitestek asztrofizikája a világegyetem egészét érintő kérdésekkel szemben. Ebben a kérdéskörben az asztrofizika, s főleg az égitestek azon részének fizikája, amelyet látunk, alkalmazott tudományként jelentős súllyal van jelen. Emellett tudásunkban egyelőre számottevő hiányosságok is vannak: egy kvazár vagy egy aktív galaxismag színeképek keletkezését egyáltalán nem értjük olyan jól, mint egy csillag színeképet.

4. fejezet

A MONOKROMATIKUS SUGÁRZÁS ÁRAMLÁSI EGYENLETE

Az ebben a fejezetben követett tárgyalási mód áttekintést ad, és mennyiségileg helyes eredményekre vezet a sugárzás áramlásának problémájában nem túl bonyolult geometriájú és nem túl inhomogén plazmák esetén. Példaként megnevezhetjük szinte valamennyi csillag légkörét, a különféle kisülési csöveket vagy az ívkisüléseket. Ellenpéldaként felhozhatjuk az akkréciós korongokat, esetleges forró foltjaikkal együtt, amelyek a korong éle felől optikailag vastagok, míg felülről nézve vékonyak. A térben egydimenzióssá tehető problémák manapság numerikusan szinte korlátlanul tárgyalhatók. Nem így a térben két- és háromdimenziós modellek, amelyekben nem matematikai, elvi nehézségekkel állunk szemben, hanem a jelenlegi szuperszámítógépek tárkapacitása és sebessége nem elégséges. Térben egydimenziós, időfüggő (tehát matematikailag kétdimenziós) problémák — például radiálisan pulzáló csillagok légkörének modelljei — éppen a számítástechnikai kezelhetőség határán vannak.

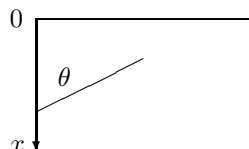
Miután így elhelyeztük a fejezet anyagát a tágabb problémakörben, hozzálátunk a legegyszerűbb, az időtől független, térben egydimenziós probléma tárgyalásához. Az itt megismert fogalmak képezik az alapot a bonyolultabb problémák tárgyalásához is.

A csillagok légköre igen jó közelítéssel planparalelnek tekinthető, ami egy kicsit megkönnyíti a sugárzás áramlásának tárgyalását. Például a Nap fotoszférájának 400 km-es vastagsága eltörpül a Nap 700000 km-es görbületes sugara mellett. Szférikus geometria esetén sincs különösebb nehézség, csupán kicsit többet kell számolni, hogy a fluxus ($\propto r^{-2}$) hígulását a növekvő sugárral figyelembe vegyük, mivel a csillag teljesítménye a légkörében a geometriai mélység függvényében már állandó.

Szuperóriás csillagoknál lehet például szükség a szférikus geometria alkalmazására.

4.1. A monokromatikus áramlási egyenlet felírása, forrásfüggvény, sugárzási egyensúly

Legyen x egy geometriai mélység a planparalel rétegződés felső határoló rétegétől



4.1. ábra

lefelé számítva, a ds elemi úthossz legyen a $d\sigma$ felületelem normálisa felé irányítva, amely θ szöget zár be $-x$ irányával. Ekkor

$$ds = -dx \sec \theta, \quad (4.1)$$

és (2.15), (2.31) (2.32) alkalmazásával föl tudjuk írni a monokromatikus energiamérleget:

$$dI_\nu(\theta) = -\kappa_\nu I_\nu(\theta) ds + \epsilon_\nu(\theta) ds. \quad (4.2)$$

Ez mindössze annyit jelent, hogy a monokromatikus intenzitás megváltozása az elnyelt és a kisugárzott monokromatikus energia különbsége. (4.2) felírásakor rögtön egyszerűsítettünk $d\nu dt d\sigma d\Omega$ -val. (4.1), a (2.35)-ből következő

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu dx, \quad (4.3)$$

és a Kirchhoff-törvény analógiájára definiált

$$\epsilon_\nu = \kappa_\nu S_\nu, \quad (4.4)$$

S_ν forrásfüggvény felhasználásával kapjuk, hogy

$$\cos \theta \frac{dI_\nu(\theta, \tau_\nu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\theta, \tau_\nu) - S_\nu(\theta, \tau_\nu), \quad (4.5)$$

ami teljes nevén a monokromatikus sugárzás áramlási egyenlete. (Angol nyelvű irodalomban "transfer equation".)

(4.5) bonyolultságát az adja, hogy τ_ν -n keresztül a különböző mélységekben levő (különböző hőmérsékletű) rétegek sugárzása kapcsolódik össze, és ezenkívül S_ν -n keresztül a más ν' frekvenciákon elnyelt sugárzás is megjelenik. Erősen inhomogén közegekben — akkréciós korongokban, nagy mágneses térrel bíró égitestekben — még tovább fokozza ezt a bonyolult helyzetet az, hogy κ_ν , tehát τ_ν függ θ -tól.

4.1.1. A forrásfüggvény

A forrásfüggvény dimenziója ugyanaz, mint I_ν -é, termikus egyensúlyban pedig azonos a (2.37) Kirchhoff–Planck-függvénnyel. Elnevezését így érthetjük meg: S_ν -vel adjuk meg azt, ahogy az égitestünk légkörét alkotó plazma sugároz. Pontosabb megadására később még visszatérünk, (4.4) alapján azonban már világos, hogy egy csillag légkörében a plazma elemi sugárzási folyamatainak számbavételével adható meg, míg egy csillag belsejében a Planck-függvény lesz, mert ott termikus egyensúly áll fenn. (4.5) tehát arról ad számot, ahogyan a csillag mélyében keletkező hőmérsékleti sugárzás azzá a vonalas színképpé alakul, amit megfigyelünk. S_ν általában nem függ θ -tól, ϕ -tól, míg I_ν θ -tól való függésére már feltétlenül tekintettel kell lennünk.

4.1.2. Sugárzási egyensúly

(4.5) a monokromatikus energiamérleget fejezi ki: csak annyit mond, hogy a monokromatikus intenzitás megváltozása a $d\tau_\nu$ optikai mélység intervallumban az elnyelés és a kisugárzás eredője. Az égitestek légkörében energia (teljesítmény) nem szabadul föl, ezért (4.5)-höz még egy integrális mellékfeltétel is tartozik, amely ezt kifejezi. Például plánparalel geometria és sugárzási egyensúly esetén a (2.29)-ben definiált sugárzási fluxus konstans az x geometriai mélység függvényében:

$$\frac{1}{4} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{dF_\nu(x)}{dx} d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu(x) d\nu - \int_0^\infty \kappa_\nu S_\nu(x) d\nu = 0, \quad (4.6)$$

amint ez (4.5) Ω térszögre való integrálásából megkapható, a lépések voltak: szorzás $\kappa_\nu d\Omega/4\pi$ -vel, integrálás a teljes térszögre és frekvenciatartományra, (2.19), (2.18) definíciók és S_ν izotropiájának felhasználása.

Az egy adott ν frekvencián elnyelődött sugárzásnak valamilyen más formában jelentkeznie kell. A folyamatok modellezése viszonylag egyszerű addig, amíg az elnyelt sugárzás más ν' frekvenciájú sugárzásként jelenik meg ugyanabban az x geometriai mélységben $S_{\nu'}$ részeként, ekkor ugyanis (4.6) szerint

$$\int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu(x) d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu S_\nu(x) d\nu. \quad (4.7)$$

Ha (4.7) teljesül egy bizonyos $[x_1, x_2]$ intervallumban, akkor ott *sugárzási egyensúlyról* beszélünk. Az integrál dimenziója (4.7)-ben teljesítménysűrűség. Amikor sugárzási energia (teljesítmény) valamilyen endoterm folyamat energiaszükségletét fedezi — például mozgás indul meg, ionizáció történik stb., tehát (4.7) bal oldalának egy része eltűnik, — vagy valamilyen exoterm folyamat zajlik — például kinetikus energia disszipál égitestünk légkörében, ionizált anyag rekombinálódik, molekulák képződnek stb., akkor pótlólagos S_ν jelenik meg (4.7) jobb oldalán, — a természetnél fogva nem monokromatikus energiaháztartás felírása nem mindig tartozik a könnyű feladatok közé. Konvekció, pulzáció esetén vannak olyan tartományok a

csillag külső részeiben, amelyekben a sugárzási egyensúlytól számottevő eltérések tapasztalhatók. Ezt az eltérést jellemzi például a kinetikus és sugárzási energia sűrűségének hányadosa az adott tartományban.

4.2. A monokromatikus áramlási egyenlet formális megoldása

(4.5) elsőrendű lineáris differenciálegyenlet, *formális* megoldása nem nehéz feladat, mivel a $\tau_\nu \rightarrow \tau'_\nu$ helyettesítéssel és $\exp -\tau'_\nu \sec\theta$ -val szorzás után átírható a következő alakra:

$$\frac{d}{\sec\theta d\tau'_\nu} \left(e^{-\tau'_\nu \sec\theta} I_\nu \right) = -S_\nu e^{-\tau'_\nu \sec\theta}, \quad (4.8)$$

amiből τ_1 és τ_ν között τ'_ν szerinti integrálással és $e^{\tau_\nu \sec\theta}$ -val szorzásból következik, hogy

$$I_\nu(\tau_\nu, \theta) - I_\nu(\tau_1, \theta) e^{-(\tau_1 - \tau_\nu) \sec\theta} = - \int_{\tau_1}^{\tau_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu) \sec\theta} d\tau'_\nu \sec\theta, \quad (4.9)$$

és τ_1 is természetesen a ν frekvencián veendő. $0 \leq \theta \leq \pi/2$ esetén (4.9) a kifelé haladó sugárzás monokromatikus intenzitását írja le, míg $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ a befelé haladó sugárzásra vonatkozik. Ebből tudjuk megadni a (4.5) elsőrendű differenciálegyenlethez szükséges kezdeti feltételt: $I_\nu(\tau_1, \theta)$ értékét.

Ha a kívülről befelé haladó sugárzás monokromatikus intenzitására vagyunk kíváncsiak τ_ν optikai mélységben, (4.9)-ben a kiinduló optikai mélységünk $\tau_1 = 0$ lesz, ami a csillag külső határának értelemszerű definíciója. A kezdeti feltétel pedig $I_\nu(0, \theta) = 0$ lesz $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ mellett, vagyis

$$I_\nu(\tau_\nu, \theta) = \int_{\tau_\nu}^0 S_\nu(\tau'_\nu) e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu) \sec\theta} d\tau'_\nu \sec\theta \quad (4.10)$$

vonatkozik $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ -re. Itt jegyezzük meg, hogy az $I_\nu(0, \theta) = 0$ zérus határfeltétel matematikai idealizáció, amit a tárgyalás kedvéért vezettünk be, a valóságot $I_\nu(0, \theta) \ll I_\nu(\tau \approx 0.1, \theta) = 0$ jobban írná le.

Ha a csillag közepéből kifelé jövő monokromatikus intenzitására vagyunk kíváncsiak τ_ν optikai mélységben ($0 \leq \theta \leq \pi/2$), nem követünk el hibát, ha a véges, de igen nagy τ_1 -t $\tau_1 = \infty$ -nel helyettesítjük, amivel (4.9)

$$I_\nu(\tau_\nu, \theta) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tau'_\nu) e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu) \sec\theta} d\tau'_\nu \sec\theta. \quad (4.11)$$

(4.11) alapján a csillag felületén kiáramló sugárzás monokromatikus intenzitása:

$$I_\nu(0, \theta) = \int_0^{\infty} S_\nu(\tau'_\nu) e^{-\tau'_\nu \sec\theta} d\tau'_\nu \sec\theta, \quad (4.12)$$

4.2. A MONOKROMATIKUS ÁRAMLÁSI EGYENLET FORMÁLIS MEGOLDÁSA 35

ez izotrop S_ν esetén is erősen irányfüggő. A monokromatikus fluxus a csillag felületén (2.19) és (4.12) felhasználásával (beszorzás $\cos\theta$ -val, integrálás ϕ szerint 0 és 2π között, egyszerűsítés π -vel a lépések):

$$F_\nu(\tau_\nu = 0) = F_\nu^+(0) = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty S_\nu(\tau'_\nu) e^{-\tau'_\nu \sec\theta} d\tau'_\nu \sin\theta d\theta, \quad (4.13)$$

mert a (4.10) kapcsán tárgyaltak szerint $I_\nu(0, \theta) = 0$ ha $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, tehát $F_\nu^-(0) = 0$.

A

$$w = \sec\theta, \quad dw = d\theta \sin\theta / \cos^2\theta \quad (4.14)$$

változók bevezetésével definiáljuk az n -edik integrál exponenciális függvényt:

$$K_n(\tau_\nu) = \int_1^\infty e^{-w\tau_\nu} dw / w^n. \quad (4.15)$$

Ennek felhasználásával integrálni tudunk (4.10-4.12)-ben θ szerint ha S_ν izotrop az integrálás τ_ν tartományában: például a közepes monokromatikus intenzitás a csillag felületén

$$J_\nu(0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu \sec\theta} \sin\theta \sec\theta d\phi d\theta d\tau_\nu = \frac{1}{2} \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu) K_1(\tau_\nu) d\tau_\nu. \quad (4.16)$$

Ha pedig $\cos\theta$ -val szorzunk, kapjuk a megfelelő fluxusokat:

$$F_\nu^+(\tau_\nu) = 2 \int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(\tau'_\nu) K_2(\tau'_\nu - \tau_\nu) d\tau'_\nu, \quad (4.17)$$

$$\int_{\pi/2}^\pi e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu) \sec\theta} \sec\theta \cos\theta \sin\theta d\theta = \int_\infty^{-1} e^{-(\tau'_\nu - \tau_\nu)w} dw / w^2 = \int_1^\infty e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)w} dw / w^2 \quad (4.18)$$

miatt

$$F_\nu^-(\tau_\nu) = 2 \int_{\tau_\nu}^0 S_\nu(\tau'_\nu) K_2(\tau_\nu - \tau'_\nu) d\tau'_\nu, \quad (4.19)$$

a csillag felületén pedig

$$F_\nu(0) = F_\nu^+(0) = 2 \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu) K_2(\tau_\nu) d\tau_\nu. \quad (4.20)$$

Ebből az összefüggésből nyilvánvaló, hogy a luminozítás (2.47) definíciójában szereplő R sugár a $\tau = 0$ optikai mélységhez tartozó sugár.

4.3. A megoldás értelmezése

4.3.1. Homogén, izoterm plazmanyaláb sugárzása

Írjuk föl egy T hőmérsékletű izoterm és x vastagságú homogén közegből jövő sugárzás intenzitását. $\theta = \pi$ irányból nézzük a közeget. A homogenitás azt jelenti, hogy κ_ν ugyanakkora mindenhol, S_ν csak T függvénye és nem függ a $\tau_\nu = \kappa_\nu x$ optikai mélységtől. A $\tau_1 = 0$ -nál beeső sugárzás $I_\nu(0, 0) = 0$ legyen, ekkor (4.10) közvetlenül alkalmazható:

$$I_\nu(\tau_\nu, \pi) = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(T) e^{\tau'_\nu - \tau_\nu} d\tau'_\nu = S_\nu(T)(1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (4.21)$$

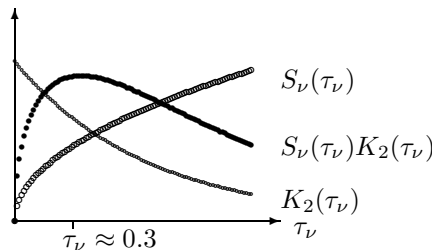
Ha optikailag vékony a közeg (4.21) értéke $S_\nu(T)\tau_\nu$ ($\tau_\nu \ll 1$ miatt sorbafejtettük az exponenciálist, és megálltunk a 2. tagnál), míg ha optikailag vastag $S_\nu(T)$. Optikailag vékony esetben tehát az $I_{\nu_1}/I_{\nu_2} = S_{\nu_1}\kappa_{\nu_1}/(S_{\nu_2}\kappa_{\nu_2})$ összefüggésből mérhetjük a monokromatikus abszorpciós koefficiensek hányadosát a különböző frekvenciákon. Laboratóriumi spektroszkópia számára fontos ez az egyszerű összefüggés, akár asztrofizikai alkalmazási célokra mérjük egy-egy színekvonal erősségét, profilját, akár ipari vagy egyéb alkalmazás lebeg a szemünk előtt. Ezenkívül optikailag vékony égitestek — például csillagközi felhők tanulmányozásánál is kiindulópontot jelent.

Optikailag vastag esetben ilyen mérés nem lehetséges, mert $I_{\nu_1}/I_{\nu_2} \approx S_{\nu_1}/(S_{\nu_2})$, κ_ν nem szerepel a hányadosban, a monokromatikus intenzitás tart a forrásfüggvényhez.

Ebből a megfontolásból az is világos, hogy izoterm atmoszféra esetén csak a forrásfüggvényt látnánk, s ha az a Planck görbe, akkor vonalas színekép nem keletkezne.

4.3.2. A színekvonalak keletkezési mélysége

A 4.2. ábrára fölrajzoltuk önkényes egységekben $K_2(\tau_\nu)$, $S_\nu(\tau_\nu)$ és szorzatuk menetét. Megjegyezzük még, hogy az $S_\nu(\tau_\nu)e^{-\tau_\nu \sec \theta}$, szorzat menete is hasonló, és az itt elmondandó tulajdonságok minden fizikailag plauzibilis forrásfüggvényre ugyanazok.



4.2. ábra

Látnivaló, hogy (4.12) és (4.20) integrandusainak maximuma van egy bizonyos τ_ν optikai mélységben. Ez a maximum igen különböző forrásfüggvények feltevése mellett is $\tau_\nu \approx 0,3$ -nál van, ezért ezt az optikai mélységet a ν frekvenciájú sugárzás keletkezési mélységének tekinthetjük, mert ennél nagyobb mélységekből sugárzás már alig jön ki.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\kappa_\nu(x) = \kappa_\nu$, vagyis a csillagunk légkörében a monokromatikus abszorpciós koefficiens nem függ az x geometriai mélységtől. Ekkor a $\tau_\nu \approx 0,3$ optikai mélységnek $x = 0,3/\kappa_\nu$ geometriai mélység felel meg. Mivel az erős színekpvonalak frekvenciáján κ_ν több nagyságrenddel meghaladhatja κ_ν értékét a környező kontinuumban, az erős színekpvonalak frekvenciáján kis geometriai mélységbe látunk csak be. Ha a csillag légkörében a hőmérséklet kifelé haladva csökken, abszorpciós színekpvonalat kapunk, mert S_ν a hőmérséklettel gyorsan csökken, s a vonal közepében ezt látjuk átlagolva a vonal keletkezési mélységére. Ha kifelé haladva nő a hőmérséklet, emissziós színekpvonalat kapunk, mert ezúttal a kisebb geometriai mélységhez nagyobb átlaghőmérséklet tartozik. Ez alapján rögtön megértjük, hogy az emissziós színekpvonal hőmérsékleti inverzióról árulkodik egy csillag légkörében, s mivel az ilyesmi kromoszféra sajátossága, csillagszínekpvonalokban az emissziós vonalak a kromoszferikus aktivitást sejtetik.

Mivel egy csillag légköre egyáltalán nem izoterm (4.12), illetve (4.20) integrandusának a 4.2. ábrán bemutatott menete vonalas színekpvonal keletkezéséhez vezet már akkor is, ha $S_\nu(\tau_\nu)$ helyére a Planck-függvényt írjuk, amely ugyan csupán folytonos színekpvonalat ír le, hiszen az üregsugárzásban szó sincs színekpvonalakról. A csillagok légköre optikailag vastag, a forrásfüggvény jó közelítése a Planck függvény, a vonalas színekpvonal keletkezésének feltétele tehát a hőmérséklet zérustól eltérő gradiense.

Megjegyzés

(4.12), illetve (4.16-4.20) tényleges kiszámításakor

$$\sum_i c_i S_\nu(\tau_{\nu_i}) \quad (4.22)$$

típusú összeget szokás venni, amely 5–6 tag esetén már a kívánatos egy százaléknál lényegesen pontosabb, c_i -k pedig különösebb nehézség nélkül meghatározhatók. Ezt az összeget, illetve (4.10-4.12)-öt szokás $\Lambda(S_\nu)$ -vel is jelölni, ami tömören azt fejezi ki, hogy (4.10-4.12, 4.16-4.20) kiszámításakor $S_\nu(\tau_\nu)$ -k milyen kombinációját kell venni a különböző frekvenciákon és optikai mélységeken. Szokták Λ -operátor módszernek is nevezni ezt a felírást, amely már kifejezetten a numerikus megoldást tarja szem előtt.

4.3.3. Peremsötétedés

Egy csillag peremsötétedését — $I_\nu(0, \theta)$ változását a θ szög függvényében — (4.12) alapján érthetjük meg. Ha megrajzoljuk a 4.2. ábrát különböző $0 \leq \theta \leq \pi/2$ szögekre, az jön ki, hogy a perem felé haladva (az egyre nagyobb szögű rálátáskor, tehát $\theta \rightarrow \pi/2$, $\sec\theta \rightarrow \infty$), (4.12) döntő járuléka egy adott ν frekvencián egyre kisebb τ_ν értékekből, vagyis a kisebb x geometriai mélységekből jön, ami kisebb fényességet is jelent, ha nincs hőmérsékleti inverzió a ν frekvenciájú sugárzás keletkezési mélységében. (Hőmérsékleti inverzió esetén — ha ez az inverziós réteg még optikailag vastag is — a perem felé haladva növekvő $I_\nu(\theta)$ -t észlelnénk, ami peremfényesedéssel egyenértékű!)

A Nap peremsötétedését megfigyelték már a XIX. század végén, a fenomenológikus sugárzási elmélet egyik nagy sikere volt, hogy sikerült ezt a jelenséget megérteni.

4.3.4. Az Eddington-Barbier közelítés

Feltételezzük, hogy a forrásfüggvény Taylor-sorba fejthető a csillaglégkörön belül, vagyis egy $\tau^* < 1$ optikai mélység környezetében:

$$S_\nu(\tau) = S_\nu(\tau^*) + \frac{dS_\nu}{d\tau}(\tau - \tau^*) + \dots \quad (4.23)$$

Beírjuk ezt az áramlási egyenlet (4.12) formális megoldásába és $x = \tau' \sec\theta$ helyettesítéssel elvégezzük az integrálást:

$$I_\nu(0, \theta) = S_\nu(\tau^*)\Gamma(1) + \frac{dS_\nu}{d\tau} \left[\Gamma(2)\cos\theta - \Gamma(1)\tau^* \right] + \dots \quad (4.24)$$

Nullává tesszük a második tagot, elhanyagoljuk a magasabb rendű tagokat, figyelembe vesszük, hogy $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$, így kapjuk azt, hogy a csillag felszínén

$$I_\nu(0, \theta) \approx S_\nu(\tau^* = \cos\theta). \quad (4.25)$$

Ezt az Eddington-Barbier közelítés. A (4.25) szögfüggés tulajdonképpen a csillag peremsötétedésére, az $I_\nu(0, \theta)/I_\nu(0, 0) \propto \cos\theta$ hányadosra jó közelítés.

Beírjuk (4.23)-t a csillag felszínén a fluxusra kapott (4.13) kifejezésbe, integrálás után kapjuk, hogy

$$F_\nu(\tau_\nu = 0) = S_\nu(\tau_\nu^*)\Gamma(1) + \frac{dS_\nu}{d\tau} \left[\frac{2\Gamma(2)}{3} - \Gamma(1)\tau^* \right] + \dots \approx S_\nu(\tau_\nu^* = \frac{2}{3}). \quad (4.26)$$

A második tagot itt is nullává tehetjük τ^* megfelelő választásával, a többi pedig elhanyagoljuk, ezáltal a ν frekvenciájú fluxus tehát jó közelítéssel megkapható, ha a forrásfüggvény értékét vesszük ν frekvencián a $\tau_\nu^* = \frac{2}{3}$ optikai mélységben.

Figyeljük meg a viszonylag jó egyezést a 4.3.2. alfejezetben említett $\tau_\nu = \frac{1}{3}$ - dal. Mint ott is említettük, a különböző frekvenciákhoz (hullámhosszakhoz) tartozó

$\tau_\nu^* = \frac{2}{3}$ avagy $\frac{1}{3}$ nagyon különböző geometriai mélységekhez tartozik. Mivel S_ν exponenciálisban tartalmazza a hőmérsékletet rögtön érthetővé válik az, hogy a vonalas színekben a hullámhossz igen csekély különbségéhez igencsak különböző monokromatikus fluxusok tartoznak.

A (4.13) kifejezés itt említett tulajdonságai adják az alapot a ma már inkább csak történeti érdekességként számontartott megfordító-réteg közelítésnek. "Megfordító réteg"-nek nevezték a XX. század elején a csillaglégkört, illetve egész pontosan annak azt a részét, amelyben átalakul a vonalakat nem tartalmazó hőmérsékleti sugárzás a vonalas színeképpé. Ha ez a tartomány izoterm volna, akkor a 4.3.1. alfejezet szerint csak az $S(T)$ forrásfüggvényt láthatnánk, csillaglégkör esetén ez a T hőmérsékletű Kirchhoff-Planck függvény volna.

4.3.5.

A színekép, vagyis (4.12), illetve (4.20) kiszámítása a végső célunk. Ez meg is szabja a további programunkat. Mivel S_ν , κ_ν függ a plazma paramétereitől, például a hőmérsékletétől, sűrűségétől, mozgásállapotától, a benne lévő mágneses tértől és még sok egyébtől, ezek eloszlását az x geometriai mélység függvényében ki kell számítanunk, illetve meg kell adnunk csillagunk légkörében. Fizikai intuíciónk sejteti, hogy a hőmérséklet eloszlása a csillaglégkör energiaháztartásával van szoros kapcsolatban: például kisugárzás, mozgások kialakulása hűtik a légkört, sugárzás elnyelése, mechanikai energia disszipációja fűtenek. A sűrűség eloszlása és a mozgásállapot aztán a csillaglégkör hidrodinamikai sajátosságaitól, vagyis impulzusháztartásától is függ.

Az itt vázolt teljes problémakört három nagyobb egységben tárgyaljuk. Az 5. fejezet nagy vonalakban vázolja a hőmérséklet-rétegződés kiszámítását. A 7. fejezetben foglalkozunk a csillag légkörének egyensúlyával, hogy a légkör globális tulajdonságairól és a légkört alkotó plazma mikroszkopikus tulajdonságairól számot tudjunk adni. A 6. és ?? fejezetben foglalkozunk azokkal az atomfizikai, plazmafizikai folyamatokkal, amelyek sugárzás elnyeléséhez és keletkezéséhez vezetnek.

5. fejezet

SZÜRKE MODELLEK

A monokromatikus abszorpciós koeficiens nagyon erősen változik a frekvencia függvényében, ez fölöttébb megnehezíti a sugárzás áramlásának leírását még a legegyszerűbb, a stacionárius, térben egydimenziós esetben is. Ha κ_ν helyére egy alkalmasan választott κ átlagolt abszorpciós koeficiens vezetünk be, a (4.5) monokromatikus áramlási egyenlet állandó együtthatós elsőrendű közönséges differenciálegyenletté egyszerűsödik, amely könnyen, analitikusan megoldható. Ez lehetővé teszi, hogy az I összintenzitás különböző súlyfüggvényekkel képzett átlagai (momentumai) között viszonylag egyszerű kapcsolatokat találjunk, amelyek fizikai értelmezése nem túl nehéz. Ezek felhasználásával aztán egy csillag légkörében megbecsülhetjük akár a hőmérséklet eloszlását is, ha csak sugárzási folyamatok szállítják ott az energiát.

Mivel a frekvenciára valamilyen módon átlagolt abszorpciós koeficiens fogunk ebben a fejezetben használni, amely a frekvenciától tehát már független, innen jön az itt tárgyalt modellek gyűjtőneve: szürke modellek. Jelentőségük mind a mai napig nem veszett el, mert viszonylag egyszerű úton kiinduló értéket adnak csillagunk légkörének egy fontos paraméterére, a hőmérséklet változására az optikai mélység függvényében. Ezt a kiinduló eloszlást aztán természetesen finomítani kell nem kevés numerikus munkával, ha mennyiségileg is helyes légkörmodellt akarunk. További érv még a szürke modellek tárgyalása mellett, hogy κ jó megválasztása esetén a szürke modellek egész jó közelítést jelentenek, és áttekinthetőségük bepillantást enged egy igen bonyolult problémába.

Végül megemlítjük, hogy κ -t *opacitás*nak is szokták nevezni.

5.1. Az Eddington-közelítés

A $d\tau = \kappa dx$ átlagos optikai mélység bevezetésével a monokromatikus áramlási egyenlet — (4.5) — a következő formát ölti:

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{d\tau} = I_\nu - S_\nu, \quad (5.1)$$

amelyet frekvenciára integrálva kapjuk, hogy

$$\cos\theta \frac{dI}{d\tau} = I - S. \quad (5.2)$$

(5.2)-t átlagoljuk a térszögre (beszorunk $d\Omega/4\pi$ -vel és integrálunk), S izotropiája miatt

$$\frac{1}{4} \frac{dF}{d\tau} = J - S = 0, \quad (5.3)$$

mert (2.18) analógiájára

$$J = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I d\Omega/4\pi, \quad (5.4)$$

és sugárzási egyensúly esetén (4.7) szerint

$$J = S, \quad (5.5)$$

tehát modellünk F fluxusa konstans.

Integráljuk (5.2) $\cos\theta/4\pi$ -szeresét a térszögre, S izotropiája miatt az eredmény:

$$\frac{dK}{d\tau} = \frac{F(0)}{4}, \quad (5.6)$$

ahol

$$K = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I \cos^2\theta d\Omega/4\pi \rightarrow \frac{I}{3} = \frac{J}{3}. \quad (5.7)$$

A csillag belsejében ugyanis I egyre inkább izotroppá válik, ezért (5.7)-ban kivehető az integráljel elé, a maradék pedig már könnyen integrálható, értéke $1/3$. Az izotropia miatt egyben $I = J$ lesz. (Eddington közelítésnek nevezzük ezt A. S. Eddington (1882-1944) emlékére, aki a sugárzás áramlásának tárgyalásában is maradandót alkotott az asztrofizikában.) Mindezekből következik, hogy $\tau \rightarrow \infty$ esetén (5.6) megoldása

$$J(\tau) = \frac{3}{4}F(0)\tau + \text{konstans}, \quad (5.8)$$

és a konstans értékét úgy választjuk meg, hogy a csillag felületén ($\tau = 0$) legyen

$$J(0) = \frac{1}{2}F(0). \quad (5.9)$$

$F(0)$ írásával (5.6)-tal kezdődően azt hangsúlyozzuk, hogy ez egy konstans számérték, (2.47) szerint aT_e^4 . Az (5.9) választás okai a következők: itt a befelé haladó sugárzás ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$) összintenzitása $I(0, \theta) = 0$, a kifelé haladó sugárzás összintenzitása izotropnak vehető, vagyis az Eddington-közelítést érvényesnek vesszük a csillag felületén a $0 \leq \theta \leq \pi/2$ tartományban *is*: ekkor

$$J(0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(0, \theta) \sin\theta d\phi d\theta = -\frac{1}{2} \cos\theta \Big|_0^{\pi/2} I(0) = I(0)/2 \quad (5.10)$$

és hasonlóan adódik, hogy

$$\pi F(0) = \pi F^+(0) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(0, \theta) \cos\theta \sin\theta d\phi d\theta = 2\pi \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} I(0) = \pi I(0), \quad (5.11)$$

amiből éppen (5.9)-t kapjuk. (5.8) és (5.9) összevetésével kapjuk, hogy

$$J(\tau) = \frac{3}{4} F(0) \left(\tau + \frac{2}{3} \right), \quad (5.12)$$

továbbá sugárzási egyensúly esetén (5.5) miatt

$$S(\tau) = \frac{3}{4} F(0) \left(\tau + \frac{2}{3} \right), \quad (5.13)$$

és természetesen a konstans fluxust vehettük a csillag felületén. Ebből még látszik az is, hogy az Eddington-Barbier közelítés kapcsán a (4.23) sor első két tagjára szorítkozás igen jó közelítés.

Összefoglalva:

- szürke modellünk fluxusa konstans,
- az Eddington-közelítés érvényes benne mindenütt,
- de a csillag felületén ennek ellentmondó határfeltételt adtunk meg, amitől $F^+ = F \neq 0$ lett.
- így elkövetett hiba körülbelül F/J , ami nullához tart, ha $\tau \rightarrow \infty$.

5.2. Csillagok peremsötétedése

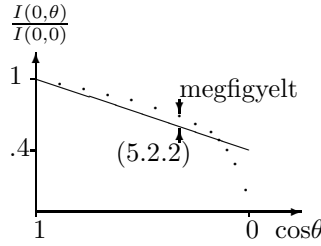
A meglehetősen bonyolult probléma tárgyalásában alkalmazott nagyfokú egyszerűsítések ellenére (5.12) igen jó közelítés. Erről meggyőződhetünk többek között azzal, hogy kiszámítjuk egy csillag peremsötétedését. Beírjuk (5.12)-et (4.12)-be, (5.1.4) szerint a forrásfüggvény azonos J -vel, az izotropiája miatt az integrálás nem nehéz feladat, kapjuk, hogy

$$I(0, \theta) = \frac{3}{4} F(0) \int_0^\infty \left(\bar{\tau} + \frac{2}{3} \right) e^{-\tau \sec\theta} d\tau \sec\theta = \frac{3}{4} F(0) \left(\cos\theta + \frac{2}{3} \right). \quad (5.14)$$

Ebből csillagunk korongjának peremsötétedésére az igen egyszerű

$$\frac{I(0, \theta)}{I(0, 0)} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \theta \right) \quad (5.15)$$

összefüggés adódik, amelynek összevetését a Napon megfigyelt peremsötétedéssel az 5.1. ábra ábrázolja.



5.1. ábra. A peremsötétedés a Napon.

5.3. A szürke modell hőmérséklet-rétegződése

Ha (5.12)-ben $F(0)$ helyére beírunk (2.46) alapján aT_e^4 -t, és figyelembe vesszük, hogy $J = aT^4$, mert a (2.18) definíció (2.8.2a)-vel éppen ezt adja J -re, s ez $\tau \rightarrow \infty$ esetén biztosan jó közelítés, kapjuk hogy modellünk hőmérsékleteloszlása

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_e^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right). \quad (5.16)$$

Ily módon a T_e effektív hőmérséklet (2.47) definíciójának megfelelően jártunk el: modellünk fluxusa pont annyi, mint amennyit a T_e hőmérsékletű fekete test bocsát ki az egyik hemiszférába. A modellben $T = T_e$ a $\tau = 2/3$ optikai mélységben következik be. Ezért van az, hogy a csillagbelső modellezésében $\tau = 2/3$ a szokásos külső határ. Nyilvánvaló, hogy a csillag belseje felé haladva (5.16) egyre jobb közelítés.

A modell határhőmérséklete $T(0) = 2^{-1/4} T_e$. Tájékoztatásul annyit, hogy a Napon $T_e = 5780$ K, míg a határhőmérséklet 4860 K. Az empirikus légkörmodellek szerint kevesebb a határhőmérséklet, az eltérés oka nyilván az, hogy (2.37) $\tau = 0$ -nál nem túl jó, s az Eddington-közelítés is egyre kevésbé közelíti a valóságot.

5.4. A Rosseland-féle opacitás

A szürke modellek lényeges paramétere κ , amelyet többféleképpen számíthatunk ki. Ezzel tulajdonképpen azt mondjuk, hogy a szürke és a nem szürke modelleket (vagyis a valóságos légkört) többféleképpen lehet kapcsolatba hozni, s a különböző

alkalmazásokban meg kell fontolnunk, hogy melyik középérték használatával kapjuk a valóságos sugárzó tartományt, légkört, csillagközi gázfelhőt vagy éppen egy laboratóriumi kisülést legjobban közelítő szürke modellt.

Szürke modellünk filozófiájának a κ_R Rosseland-féle középérték felel meg a legjobban. Ennek képezésekor azt akarjuk, hogy (5.6) és az Eddington-közelítés — $K = J/3$, $K_\nu = J_\nu/3$ — teljesüljön, és még legyen

$$\int_0^\infty \frac{F_\nu}{4} d\nu = \int_0^\infty \frac{dK_\nu}{\kappa_\nu dx} d\nu = \frac{1}{\kappa_R} \int_0^\infty \frac{dK_\nu}{dx} d\nu = \frac{1}{\kappa_R} \frac{dK}{dx} = \frac{F}{4}. \quad (5.17)$$

Mivel az Eddington-közelítés teljesülésekor J_ν helyére a (2.37) Planck-függvény írható, J helyére pedig a Stefan–Boltzmann-törvény ($J = aT^4$), és ezekben csak T függ az x geometriai mélységtől, ezen függvények x szerinti deriválásával kapjuk, hogy

$$\frac{dK_\nu}{dx} = \frac{2h\nu^3}{3c^2} \frac{d}{dx} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2h^2\nu^4 e^\alpha}{3kT^2 c^2 (e^\alpha - 1)^2} \frac{dT}{dx} \quad (5.18)$$

és

$$\frac{dK}{dx} = \frac{d}{dx} aT^4/3 = \frac{8\pi^4 k^4 T^3}{45c^2 h^3} \frac{dT}{dx}. \quad (5.19)$$

(5.4.1)-be való helyettesítés után adódik, hogy

$$\frac{1}{\kappa_R} = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{15}{4\pi^4} \frac{\alpha^4 e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^2} d\alpha, \quad (5.20)$$

ahol $\alpha = h\nu/kT$. Nyilvánvaló, hogy κ_R a plazma kémiai összetételétől κ_ν -n keresztül függ, és ugyanazon kémiai összetételű plazmára is más-más lesz T változásával. Az 5.1. ábra mutatja a monokromatikus abszorpciókoefficiens értékét a hullámhossz függvényében, és a Rosseland-féle középértéket.

5.1. ábra. $\log \kappa_\lambda$ és $\log \kappa_R$ cm^{-1} egységekben.

Bizonyos körülmények között van értelme a Planck-féle középérték használatának:

$$\kappa_{PI} = \int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu / \int_0^\infty J_\nu d\nu, \quad (5.21)$$

amelyben J_ν a (2.37)s Planck-függvény. Ha J_ν helyére valamilyen más monokromatikus közepes intenzitást írunk, akkor az (5.21) által definiált középértéket $\kappa_{absz.}$ abszorpció középértéknek nevezzük. Ennek használata azonban nagy optikai mélységeken kifejezett hiba, igen híg plazmák (például csillagközi gázfelhők) tárgyalásakor viszont hasznos lehet. Egy csillag közepében, illetve a légkör már nem is túl nagy optikai mélységeiben a Rosseland-féle középérték jó lesz, mert a levezetések kikötött feltételek (Eddington-közelítés, J_ν a Planck-függvény) gyorsan teljesülnek τ növekedésével.

Az abszorpciós középérték kiszámításakor a plazma egyes komponenseihez tartozó κ_ν -k additív módon járulnak $\kappa_{\text{absz.}}$ -hoz, ami a kiszámítást megkönnyíti különböző gázkeverékekre. A Rosseland-féle középértéknek nincs meg ez a kényelmes tulajdonsága.

A κ_{R} -rel képezett τ optikai mélységet szokták használni a leggyakrabban a szakirodalomban táblázatosan megadott csillaglégkör-modellekben az x geometriai mélységskála helyett. Nyilvánvaló ennek a választásnak az értelme: τ a szürke modellek keretein belül egy mérésekkel is megfogható fizikai mérőszám.

5.5. A hőmérséklet eloszlásának korrekciója szürke modellekben, konstans fluxusú légkörmodellek

A Rosseland-féle opacitással vett szürke modellek F fluxusa csak akkor volna állandó τ függvényében, ha teljesülnének a levezetéskor említett feltételek: vagyis hogy a monokromatikus abszorpciós koefficiens helyettesíthető a bármely frekvencián ugyanakkora κ átlagos (Rosseland) abszorpciós koefficienssel (opacitással) és jó az Eddington-közelítés. Mivel a csillag légkörében ezek egyre kevésbé teljesülnek, ezért a jó kiindulásnak számító $T(\tau)$ -t még iteratív hőmérséklet-korrekciónak kell alávetni ha konstans fluxusú légkörmodellt akarunk. A hőmérséklet korrekciójára több numerikus algoritmus is létezik, ezeket nem ismertetjük most itt, csupán az eddig megtanultak felhasználásával érzékeltetjük a fizikai lényegét.

Az elérendő cél az, hogy a korrigált $T(\tau)$ -val teljesüljön

$$F(\tau) = F^+(\tau) - F^-(\tau) = \int_0^\infty F_\nu(\tau_\nu) d\nu = aT_e^4/\pi, \quad (5.22)$$

ahol $F^+(\tau)$ és $F^-(\tau)$ a 4.2 alfejezetben megadottak szerint számítható ki: a forrásfüggvényt izotropnak tételezve fel

$$F^+(\tau) = 2 \int_0^\infty d\nu \int_{\tau_\nu(\tau)}^\infty d\tau'_\nu S_\nu(\tau'_\nu) K_2[\tau'_\nu - \tau_\nu(\tau)], \quad (5.23)$$

míg

$$F^-(\tau) = 2 \int_0^\infty d\nu \int_{\tau_\nu(\tau)}^0 d\tau'_\nu S_\nu(\tau'_\nu) K_2[\tau_\nu(\tau) - \tau'_\nu]. \quad (5.24)$$

Elvi nehézség itt nincs, a numerikus nehézségek érzékeltetésére felsoroljuk azokat a részleteket, melyek $F^+(\tau)$ és $F^-(\tau)$ kiszámítását megnehezítik a $0 \leq \tau \ll 1$ tartományban. Tekintettel kell lennünk arra, hogy egy τ optikai (geometriai) mélységhez különböző monokromatikus optikai mélységek tartoznak. (5.23) kevésbé érzékeny rá, (5.24)-ban azonban izotrop S_ν feltételezése $\tau_\nu \approx 0$ környékén (például $S_\nu = B_\nu$) bizonyos hibát hozhat be. Ha figyelembe vesszük S_ν eltérését B_ν -től és ha (4.10) $I_\nu(\tau_\nu, \theta)$ -ját közvetlenül átlagoljuk a $\cos\theta$ súlyfüggvénnyel, ez a hiba

tetesem mennyiségű numerikus munkával kissebbíthető. Ezek miatt a hőmérséklet rétegződésének kiszámítása a légkör külső részében nem tartozik a könnyű feladatok közé. Foglalkozni azért kell ezzel a tartománnyal, mert az erős rezonanciavonalak — például a Na I D_1 és D_2 vonalai a Napon — ebben a tartományban keletkeznek.

A korrekció menete az, hogy $T(\tau)$, s ezen keresztül $F(\tau < 1)$ értékét addig kell változtatni, amíg $|\pi F(\tau) - aT_e^4|$ szórása a légkör teljes τ tartományában egy adott bizonyos érték (például 1%) alá nem csökken, ehhez a pontossághoz $T(\tau)$ -t nyilván körülbelül 0,25% pontosan kell meghatározni. A szükséges iterációk száma természetesen ügyességünkön kívül a kiinduló $T(\tau)$ jóságától is függ. Tapasztalati tényként kell tudomásul vennünk, hogy a szürke modellek értékesek ma is, mert minimális munkával egészen jó kiinduló hőmérséklet-rétegződést adnak. Eleinte csak a folytonos színképről számot adó κ_ν -vel végezték a hőmérséklet korrigálását, később az erős színképvonalakat is belevették κ_ν -be (főleg a Balmer-vonalakat a látható színképtartományban), az 1980-as évek vége felé pedig már megjelentek azok a légkörmodellek, amelyekben a fluxus állandóságának kiszámításakor több-millió gyenge fémvonal hatására is tekintettel voltak. (Angol szakirodalomban "line-blanketed" modellekről szokás beszélni.) A színképvonalak hatása egyfajta visszamelegítés ("back-warming") a csak folytonos abszorpciós koefficiensre tekintettel lévő modellekhez képest: az egyes frekvenciatartományokban jelentősen megnövekvő κ_ν hatása az, hogy meredekebbé teszi a hőmérséklet eloszlását, vagyis egy adott τ -hoz tartozó T nagyobb lesz.

Végezetül megjegyezzük, hogy a $T(\tau)$ -ra itt vázolt korrekciós eljárás csak sugárzási egyensúlyban lévő csillaglégkörre vonatkozik. A korrekció után még meg kell vizsgálni, hogy a légkör τ tartományában van-e konvektív instabilitás, s ha igen, ott a konvekció hatását is be kell számítani a hőmérséklet-rétegződésbe. Így kell eljárni akkor is, ha a csillag légkörében a hővezetés számottevő.

6. fejezet

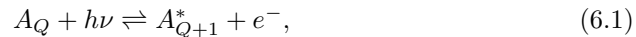
A FORRÁSFÜGGVÉNY

A Kirchhoff-törvény analógjára definált forrásfüggvény termikus egyensúlyban a Planck-függvény, amely csak a frekvenciától és a hőmérséklettől függ. A csillagok légköre azonban nincs termikus egyensúlyban, ezért a forrásfüggvény úgy volna megadható, hogy számbavesszük az összes elemi folyamatot, amelyek sugárzás kibocsátására vezetnek. Ha átgondoljuk, így reménytelen a feladat, mert egy-egy kémiai elemnek akár többmillió energiaszintje is lehet a $0 < E \approx kT$ energiaintervallumban, s ezek között számtalan megengedett átmenet van. Az itt mondottak miatt megpróbáljuk a főbb elemi sugárzási folyamatokat típusuk szerint rendezni, majd fölírni rájuk a forrásfüggvényt, és ezzel a sugárzás áramlásának problémáját jegyzetünk formalizmusának keretei között a lehető legáltalánosabban fölírni.

6.1. Az átmenetek típusai

Ebben a fejezetben a ν index nélküli abszorpciós vagy szórási koefficiens folytonos, tehát nem vonalas színképben lezajló átmenetre utal. A folytonos színképet alakító mikroszkópos folyamatok fő típusa a szabad-szabad (sz-sz) átmenet, amelynek során a plazma egy részecskéjén szóródik egy foton. A vonalas színképet a kötött-kötött (k-k) típusú átmenetek alakítják. Ezek mellett vannak még a kötött-szabad típusú átmenetek, amelyeknek a két lényegesen különböző típusa létezik.

A *radiatív ionizáció* során foton elnyelése árán kapunk egy szabad elektront, a folyamat inverze pedig a *rekombináció*. A folyamat sémája

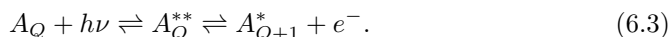


Q az atom vagy ion össztöltése. Ezek a folyamatok a színkép folytonos részét formálják az abszorpciós küszöbhez tartozó frekvenciák fölött. Ilyen abszorpciós küszöböket az

$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{2\hbar^2 n^2} \quad (6.2)$$

Balmer-képlet kapcsán a hidrogén spektrumából ismerünk: $n = 1, 2, 3, 4$ -hez rendre a Lyman-, Balmer-, Paschen- és a Pfund-küszöbök tartoznak, amelyeknek frekvenciája $\nu = |E_n|/h$, $\lambda = c/\nu \approx 91, 2, 365$ stb nm. A küszöbök szokás ugrásnak is nevezni, mert a küszöbnél nagyobb energiákon belép egy újabb fajta átmenet, amely kisebb energiákon nem lehetséges. Ez nyilvánvalóan a küszöbnél hirtelen ugrással jár a monokromatikus abszorpciós koefficiens értékében. A Balmer-ugrás például az A csillagok színekében egy nagyon szembeötlő sajátosság. Az egyelektron spektrumok aszimptotikusan mind hidrogénszerűek, ezért a hidrogénnél nehezebb elemek színekében is jelentkeznek abszorpciós küszöbök, például a semleges He abszorpciós küszöbei szembetűnőek a B típusú csillagok színekében.

Az *autoionizáció* (*kételektronos ionizáció*) során egy foton a Q töltésű A iont (atomot, ha $Q = 0$) először oly magasra gerjeszti, hogy egy Bohr-féle atommodellben gondolkozva két elektron kerül az alapállapot fölé, vagyis úgynevezett kétszeresen gerjesztett állapot jön létre, amely igen gyorsan szabad elektronná és fotonná bomlik el akkor, ha a kétszeresen gerjesztett állapot energiája A_Q ionizációs küszöbe fölött, tehát a kontinuumában van. Ezután a $Q + 1$ töltésű ion egyszeresen gerjesztett vagy alapállapotban marad vissza. Nem fizikai szükségszerűség, de a tapasztalat szerint például a semleges héliumnál az A_Q^{**} kétszeresen gerjesztett állapotok egytől egyig az A_{Q+1} ($Z = 2$ magtöltésű) hidrogénszerű ion kontinuumában helyezkednek el. Ez a két lépcsőben lezajró k-sz típusú átmenet (először egy k-k típusú folyamat, amit egy k-sz típusú követ) igen erős és széles vonalakat hoz létre bizonyos ν értékek körül, amelyek rezonanciacsúcsok a radiatív ionizáció egyébként ν szerint meglehetősen egyenletesen változó κ_ν -jén. Természetesen a folyamat inverze is létezik, amelyet *kételektronos rekombináció*nak nevezünk. A folyamat sémája:



Megjegyezzük még, hogy a héliumnál bonyolultabb elektronkonfigurációjú atomok körében számos olyan kétszeresen gerjesztett állapot van, amelynek energiája az atom ionizációs küszöbe alatt helyezkedik el.

Az autoionizáció és a kételektronos rekombináció járuléka jelentős híg plazmákban, olyanokban, amelynek csillagok kromoszférájában vagy koronájában fordulnak elő. Bár asztrofizikai szempontból is fontos volna pontosan, mennyiségileg érteni a kételektronos folyamatokat, amelyek jelentőségéről már a negyvenes évek óta tudunk, be kell vallani, hogy távol állunk ettől. E folyamatok ma is folyó kutatások tárgyává váltak az utóbbi években, mert sikerült előállítani olyan laboratóriumi plazmákat, melyekben fontos szerepet játszanak. Hogy csak egy fontos példát említsünk: gyorsítóknál előállított ionsugarakat úgy lehet hűteni, hogy hideg elektronsugarat vezetünk be az ionsugarba. Hűtés akkor jön létre, ha az ionok random mozgásait az elektronsugár lefékezi, ennek a hűtésnek az előfeltétele, hogy ne tudjanak az ionok rekombinálni. A radiatív egyelektronos rekombináció valószínűsége kicsi, nem így a kételektronos rekombinációé, ha a hűtendő ionoknak legalább egy törzselektronjuk van, és a hűtő elektronok energiája szerencsétlenül, egy kontinuumban fekvő kételektronos gerjesztett állapot közelébe esik. (Ilyenkor a hűtő elektront

elnyelik a hűtendő ionok, amelyeknek ettől megváltozik a Q -ja, s ezért kirepülnek a mágneses csapdában tartott nyalázból.)

Később még gyakran fog szerepelni a *rezonanciavonal* fogalma, a lehetséges átmenetek osztályozása jó alkalom annak pontos definiálására, hogy mit nevezünk rezonanciavonalnak. Ha egy ion vagy atom alapállapota és első gerjesztett állapota között átmenet jön létre, az alapállapotba visszakerülés valószínűsége igen nagy, mivel máshová nincs spontán út. Az első gerjesztett állapot élettartama ráadásul általában igen rövid, mert nagy az átfedés a két állapot hullámfüggvénye között. E két dolog eredőjeként ez a vonal általában sokkal erősebb az ion többi vonalánál. Ilyen vonal például a CaII H és K vonala, a NaI D₁ és D₂ vonala, hogy csak néhány ismertebb Fraunhofer-vonalat említsünk a Nap színképéből. (A római II helyesen úgy olvasandó, hogy a kalcium *második* színképének H stb vonala. E régi spektroszkópiai megjelölés onnan ered, hogy az elgőzöltetett elem színképvonalai a hőmérséklet fokozódásával egymás után jelentek meg a római számok által megadott sorrendben, I felel meg a semleges elemnek, II az egyszeresen ionizáltnak és így tovább.) Csak annyi közös a rezonanciavonalakban és a folytonos színképben megjelenő abszorpciós rezonanciákban, amilyenekről az előző bekezdésben szoltunk a kételektronos ionizáció, illetve rekombináció során, hogy mindkettő nagy szélességét a gerjesztett állapot rövid élettartama okozza. (A vonalkiszélesedésről szóló fejezetben még visszatérünk a kérdésre, és belátjuk, hogy miért vezet széles vonalakra a gerjesztett állapot rövid élettartama.)

E bevezető megjegyzések után számba vesszük a forrásfüggvénybe járulékat adó folyamatok típusait, s ezekkel végül felírjuk a monokromatikus áramlási egyenletet. (4.21) kapcsán beláttuk, hogy izoterm, optikailag vastag plazmában $S_\nu \rightarrow I_\nu \tau_\nu$ növekedésével. A csillag légkörében $\tau_\nu < 3$ és a hőmérséklet gradiense sem nulla, ezért S_ν jelentősen eltérhet I_ν -től, de a kettő között még mindig szoros és viszonylag könnyen áttekinthető kapcsolat áll fenn.

6.2. Koherens, inkoherens szórás, valódi abszorpció, extinkció

Koherens szórásról akkor beszélünk, ha az elnyelt és a kibocsátott foton hullámhossza azonos. A σ és σ_ν szórási koefficiensekkel jellemezzük (ez is távolság⁻¹ dimenziójú), amelynek iránytól való függetlensége esetén a koherens szórás járuléka a forrásfüggvényhez

$$\int_{\Omega} (\sigma + \sigma_\nu) I_\nu \frac{d\Omega}{4\pi} = (\sigma + \sigma_\nu) J_\nu, \quad (6.4)$$

(6.4) szavakban kifejezve azt mondja, hogy a szórási folyamatban elnyelt fotonok azonos frekvencián hiánytalanul megjelennek és térbeli eloszlásuk gömbszimmetrikus. Gömbszimmetriától való eltérés esetén az integráljel után be kell iktatni a szórás szögfüggését, és természetesen már nem fejezhető ki a forrásfüggvénybe kapott járuléka

a szögétől független J_ν -vel.

Mivel a csillag légkörében sem σ , sem I_ν nem iránytól független, gondoljunk például a Rayleigh- és a Thomson-szórás indukciójára ($\sigma \propto 1 + \cos^2\theta$), és a peremsötétedés tárgyalásakor levezetett $I_\nu \propto 1 + (3/2)\cos\theta$ -ra, (6.4) bizonyos közelítést jelent természetesen, amely azonban nem is nagyon rossz, mert (6.4)-ben a $\sigma_\nu I_\nu$ szorzat szerepel. A koherens szórás inkább a szabad-szabad típusú átmenetekre jellemző: fotonok rugalmas szóródásáról van itt szó, valamint a rezonanciavonalaknak főleg a közepére, mivel ez a rész olyan átmenetekből származik, amelyekben a gerjesztett állapot élettartama igen rövid, s szemléletesen szólva nincs idő a gerjesztés rövid ideje alatt arra, hogy számottevően megváltozzék az atom mozgásállapota a foton elnyelése és kibocsátása között. Ezért az elnyelt, majd kibocsátott foton frekvenciája azonos lesz.

Inkoherens szórásról akkor beszélünk, ha egy elnyelt ν frekvenciájú fotont egy ν' frekvencián ad vissza egy atom, és $|\nu - \nu'|/\nu \ll 1$. A kis frekvenciaváltozás például a Doppler-effektus miatt következhet be, mert a gerjesztés rövid, de véges időtartama alatt az atomunk mozgásállapota megváltozott. A rezonanciavonalak közepétől távol már az inkoherens szórás határozza meg a vonal profilját. A folyamatot az ι_ν szórási koefficiens segítségével jellemezzük: (6.4) analógiájára az inkoherens szórás járuléka a forrásfüggvényhez

$$\frac{\iota_\nu}{\int \iota_\nu d\nu} \int_\Omega \int \iota_\nu I_\nu d\nu \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (6.5)$$

(Az atomi reemisszió az atomok rendezetlensége miatt teljesen izotrop, ezért ι_ν izotropnak tekinthető. Kivétel képezhet például az, ha erős mágneses tér rendezi az atomokat.)

Természetesen ι_ν csak a tárgyalt vonalon belül tér el számottevően a nullától. (6.5) szavakban elmondva azt jelenti, hogy a színekvonalban I_ν teljesen átrendeződik, de ez az átrendeződés csak a színekvonal frekvenciatartományára vonatkozik. Ezért *teljes redisztribúciónak* is szoktuk nevezni ezt a folyamatot.

Valódi abszorpcióról akkor beszélünk, ha az elnyelt ν frekvenciájú foton egy teljesen más ν' frekvencián jelenik meg, az abszorpció és az emisszió frekvenciái csak egész lazán kapcsolódnak egymáshoz. Első pillanatra ez ugyan ijesztőnek tűnhet, hiszen sokmillió ν' frekvenciára kellene tekintettel lennünk, de ez mégsincs így. Ha ugyanis sokmillió lehetséges energiaszintje van a vizsgált atomnak a $0 < E \approx kT$ energiaintervallumban, akkor ezek elegendő számú ütközés esetén a Boltzmann-statisztika szerint lesznek betöltve, s ilyenkor igen igen jó közelítés S_ν -re a Planck-függvény, mert a rendszerünk a maximális entrópia állapotához van közel. A Boltzmann-statisztika érvényességét csillagunk légkörében éppen a valódi abszorpcióból származó vonalak segítségével tanulmányozhatjuk empirikusan. Az ilyen vizsgálatok során sikerült megbizonyosodni arról, hogy a csillagok fotoszférájában az Boltzmann-statisztika igen jó közelítés, s az attól való számottevő eltérés csak a csillagok kromoszférájában és koronájában jelentkezik.

Beszélni fogunk még *extinkció*ról, amit δ jellemez oly módon, hogy a forrásfüggvény a valódi abszorpcióhoz képest kicsit módosul

$$S_\nu = (1 - \delta)B_\nu(T). \quad (6.6)$$

Egy frekvenciától függő δ segítségével formálisan tudunk jellemezni olyan sugárzási folyamatokat, amelyekben a kezdő (esetleg a vég-) állapot betöltési számai között összefüggés nem írható le a Boltzmann-statisztikaával. Híg plazában fordulnak elő ilyen sugárzási folyamatok. Éppenséggel $\delta < 0$ is lehet, ami annak felel meg, hogy megjelennek az adott frekvencián fotonok. $\delta = 1$ a totális kioltást, extinkciót jelenti, az autoionizáció, vagyis a (6.3) séma szerint lezajló folyamatok éppen az itt tárgyalt kategóriába tartoznak: egy foton eltűnt, s megjelent helyette egy elektron.

6.3. A Schwarzschild-féle integrodifferenciálegyenlet

Az eddig megtárgyalt folyamatokra felírjuk most a (4.5) monokromatikus áramlási egyenletet, az x geometriai mélységben

$$\cos\theta \frac{dI_\nu(t, \theta)}{dx} = \tilde{\kappa}_\nu I_\nu - \left\{ [\kappa + \kappa_\nu(1 - \delta)] B_\nu(T) + (\sigma + \sigma_\nu) J_\nu(t) + \iota_\nu \frac{\int \iota_\nu I_\nu d\nu}{\int \iota_\nu d\nu} \right\}, \quad (6.7)$$

ahol $\tilde{\kappa}_\nu = \kappa + \kappa_\nu + \sigma + \sigma_\nu + \iota_\nu$, tehát az összes (k-k, k-sz, sz-sz típusú) folyamatból származó abszorpciókoefficiens összege. A forrásfüggvény

$$S_\nu = \tilde{\kappa}_\nu^{-1} \left\{ [\kappa + \kappa_\nu(1 - \delta)] B_\nu(T) + (\sigma + \sigma_\nu) J_\nu(t) + \iota_\nu \frac{\int \iota_\nu J_\nu d\nu}{\int \iota_\nu d\nu} \right\}. \quad (6.8)$$

(6.7) a Schwarzschild-féle integrodifferenciálegyenlet, ezt kell megoldani a vonalakon belül a sugárzás áramlásának tárgyalásához. A vonalakon kívül $\kappa_\nu = \sigma_\nu = \iota_\nu = 0$. A megoldásból aztán (4.20) alkalmazásával a csillagot elhagyó fluxus, vagyis egy vonalprofil vagy a vonalakon kívül a kontinuum közvetlenül megkapható. A megoldás numerikus integrálással és iterációval nem túl nehéz feladat, jóllehet a jobb oldalon S_ν és az ismeretlen I_ν függvény frekvencia és térszög szerinti integrálját tartalmazza. Koherens szórásra akár egzakt, analitikus megoldások is ismertek. A (4.22) kapcsán bevezetett Λ operátor talán trivialisnak tűnt, hiszen egy összeg értékét határozta csak meg. Ha azonban (7.3.2)-re alkalmazzuk Λ -t, s figyelembe vesszük, hogy azzal az ismeretlen függvény különböző mélységekben és frekvenciákon vett megfelelő kombinációját állítjuk elő, akkor érezzük, hogy könnyebb numerikus algoritmust írni így (6.7) megoldására, ami tulajdonképpen a Λ -val rögzített x, ν rácson történik. Bizonyos egyszerűsítő feltételek fennállása esetén pedig Λ akár lineáris operátorra egyszerűsödik.

Ha olyan légkörmodelleket akarunk szerkeszteni, amelyek a sugárzás áramlásában nem csak a kontinuumra vannak tekintettel ("line-blanketed model atmospheres" az angol szakkifejezés rájuk), akkor szintén (6.7)-hez kell visszanyúlnunk.

Az 1970-es évek eleje óta indult fejlődésnek ez a terület, s ma már vannak olyan modellek, amelyek többmillió gyenge színképvonal hatását is figyelembe veszik sugárzás áramlásának kvantitív tárgyalásában. Az eljárás lépései a következők: kiszámítjuk $\tilde{\kappa}_\nu$ -t, ezzel specifikáltuk, hogy a sugárzás áramlásában milyen folyamatokat akarunk figyelembe venni, veszünk egy szürke modellt kiindulásul, s addig változtatjuk $T(\tau)$ -t, míg az F fluxus a megkívánt pontosságon belül konstans nem lesz. Eközben a sugárzás áramlásának problémáját (rövidebben szólva a transzfer problémát) sokeszer kell numerikusan megoldanunk. Ezért fontos, ma is élő kutatási terület az asztrofizikában (6.7) minél hatékonyabb numerikus megoldási módzatainak keresése.

7. fejezet

EGYENSÚLYOK A CSILLAGOK LÉGKÖRÉBEN

A csillag légkörét alkotó forró plazma és a légkörön átáramló sugárzás nagyon bonyolult egyensúlyi helyzetet hoz létre. Ennek bizonyos vonatkozásait kívánjuk most szemügyre venni. Tulajdonképpen transzport-folyamatokat kell tárgyalnunk: egyfelől van a sugárzás áramlása, amellyel már valamelyest megismerkedtünk, másfelől vannak a makroszkopikus mozgások (konvekció, pulzáció, esetleg lökeshullámok), amelyek szintén hőt szállítanak. Ide tartozik még a hővezetés is, amely azonban csak a fehér törpe csillagoknál játszik valami szerepet. A sugárzási és az egyéb folyamatok egymáshoz vannak csatolva, szemléletesen szólva lehet például egy csillag légkörét (és ilyenkor persze nem elfelejtkezve a légkör alatti burokról sem) egy hőerőgéppnek tekinteni, amely a mélyből radiatív úton jövő energiát bizonyos arányban mozgássá és sugárzássá konvertálja: ilyenkor konvekcióról, pulzációról, esetleg egyéb nagyléptékű (turbulens) mozgásokról van szó. Ha a csillagunk légköre stabil e mozgásokkal szemben, akkor pedig sugárzási egyensúlyról beszélünk, amellyel bizonyos fokig már megismerkedtünk az előző fejezetekben. Az egész problémakör tárgyalását bonyolítja még, hogy a plazmát leíró anyagi állandók (például κ_ν) függenek a hőmérséklettől, aminek az egyensúlyi értékét viszont a transzport-folyamatok állítják be a mélység függvényében.

7.1. Termikus egyensúly

A *termikus egyensúly*ról már beszéltünk (nevezik gyakran *termodinamikai egyensúly*nak is), először erre kell visszatérnünk még egy kicsit. Fennállása esetén $I_\nu =$

$J_\nu = B_\nu(T)$, tehát a (közepes) monokromatikus intenzitás a Planck-függvény, nem-hogy vonalas színképről, de még tárgyak kontúrjáról sincs szó. A csillagok belsejében termikus egyensúly uralkodik, mert ott a fotonok szabad úthossza rövid, a hőmérséklet gradiense olyan kicsi, hogy a fotonokat gyakorlatilag ugyanolyan hőmérsékletű plazma nyeli el, mint amilyen kibocsátotta, ez pedig éppen az üre sugárzás keletkezésének feltétele. A rendszer a maximális entrópia állapotában van, ez azt is jelenti, hogy a plazmát alkotó részecskéket a Maxwell–Boltzmann-statisztikával lehet leírni: *a sebesség Maxwell-eloszlást követ, míg az atomi energiaszintek és ionizációs fokok betöltési számait (populációját) a Boltzmann-statisztika írja le, továbbá a sugárzási térben lévő fotonok energiaeloszlását a Bose–Einstein-statisztika adja meg.* Ez utóbbi folyományát, a hőmérsékleti sugárzást a 2. fejezetben már megtárgyaltuk, itt most még átismételjük a Boltzmann-statisztikának az asztrofizikus számára fontos vonatkozásait.

7.1.1. Az atomi részecskék sebességének eloszlása

A statisztikus mechanikából megismert Maxwell–Boltzmann-energiaeloszlást alkalmazhatjuk egy ideális gázban a sebesség látóirányú komponense és a sebesség abszolút értéke eloszlásának a meghatározására. Az i állapothoz tartozzék $E_i = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$ kinetikus energia, ahol p_x , stb az impulzus komponensei egy olyan derékszögű koordináta-rendszerben, amelynek x tengelye a látóirányunkba esik. Ennek az i állapotnak a valószínűsége, vagyis az, hogy a V térfogatban lévő N számú részecskék közül hány ΔN számú energiája éppen E_i , az alábbi:

$$\frac{\Delta N}{N} = W(i) = \frac{1}{\hat{S}} e^{-E_i/kT} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \quad (7.1)$$

ahol

$$\begin{aligned} \hat{S}(T) &= \sum_i e^{-E_i/kT} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \\ &= \int_V \int_p e^{-(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2mkT} dx dy dz dp_x dp_y dp_z \\ &= V(2\pi mkT)^{3/2}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

\hat{S} a fázisösszeg, illetve a fázisintegrál, az összegzést, illetve az integrálást a gázt tartalmazó V térfogatra és a p impulzus összes lehetséges értékére kell kiterjeszteni, felhasználtuk továbbá, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = (\pi/a)^{1/2}$. Mivel nem kvantumstatisztikáról van szó, a $\Delta x \cdots \Delta p_z$ fázistérbeli elemi térfogatot tetszőlegesen kicsivé választhattuk, s ezért lehetett integrálni a szummázás helyett \hat{S} -ben.

Ha a sebesség v abszolút értékének eloszlására vagyunk kíváncsiak, vagyis a v és a $v + dv$ intervallumba eső részecskék számára, be kell vezetnünk (7.1)-ben az impulzus $p = mv = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}$ abszolút értékét, s az impulzustérben a p -hez tartozó $0 \leq \theta_p \leq \pi$, $0 \leq \phi_p \leq 2\pi$ polárszögeket. A polárszögek szerinti

sebességeloszlásra nem vagyunk kíváncsiak, ezért ezekre és a V térfogatra integrálni kell, figyelembe véve, hogy $dp_x dp_y dp_z = p^2 dp \sin\theta_p d\theta_p d\phi_p$, vagyis

$$W(v) = \frac{1}{\tilde{S}} \int \int \int_V dx dy dz e^{-p^2/2mkT} 4\pi p^2 \Delta p = 4v^2 e^{-(v/v_0)^2} \Delta v / v_0^3 \pi^{1/2} \quad (7.3)$$

lesz, ahol a sebesség legvalószínűbb értéke

$$v_0 = (2kT/m)^{1/2} = 0,129(T/m)^{1/2} \text{ km/sec}, \quad (7.4)$$

amint erről (7.3) deriválásával meggyőződhetünk, m pedig protontömegnyi egységekben értendő. (Mivel $N/V = n$ a részecskék számsűrűsége, $W = \Delta N/N = \Delta n/n$).

Az x látóirányunkba eső u sebességkomponens eloszlására vagyunk még kíváncsiak, amit (7.1) V térfogatra és p_y, p_z szerinti integrálásával kapunk meg. Ez az eloszlás adja majd meg azt, hogy egy színekponton λ hullámhossza (ν frekvenciája) körül milyen lesz az eloszlása a

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{u}{c} + O\left(\left[\frac{u}{c}\right]^2\right) \quad (7.5)$$

hullámhossz-eltolódásnak a Doppler-effektus miatt. Tehát

$$\begin{aligned} W(u) &= \frac{V}{\tilde{S}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_y^2/2mkT} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_z^2/2mkT} dp_z e^{-p_x^2/2mkT} \Delta p_x \\ &= (\pi v_0)^{-1/2} e^{-(u/v_0)^2} \Delta u, \end{aligned} \quad (7.6)$$

haranggörbe lesz, $T = 10^4 K, m = 1$ esetén $\Delta\lambda/\lambda \approx 4,3 \times 10^{-5}$, így például a H_β vonal kiszélesedése a Doppler effektus miatt körülbelül 0,02nm.) Szuperóriás, óriás csillagok színeképében fordul elő, hogy a Balmer vonalak profilja haranggörbe, mert e csillagok híg légkörében a Doppler-effektus a fő kiszélesítő mechanizmus. Itt jegezzük meg, hogy $W \propto e^{-u^2} > 0$ miatt a csillaglégkör csekély számú részecskéjének mindig nagyobb a sugárirányú sebességkomponense, mint a szökési sebesség; ezért minden csillag "párolog" egy kis mértékben.

7.1.2. Az atomi energiaszintek betöltési számai

A Boltzmann-statisztika egy gázban a különböző i, j energiaszintek betöltéséről ad számot, a szintekhez tartozó n betöltési számok hányadosa

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{g_i}{g_j} \exp\left\{-\frac{E_{ij}}{kT}\right\}, \quad (7.7)$$

ahol g az adott szint statisztikus súlya, egész szám, amely azt adja meg, hogy hányszorosan degenerált az adott szint, E_{ij} pedig az energiakülönbség az i -edik és

j -edik szint között. A leggyakrabban arra lesz szükségünk, hogy az összes atom (N) közül hány van az i -edik szinten, ezt

$$\frac{n_i}{N} = \frac{g_i}{\hat{S}} \exp\left\{-\frac{E_i}{kT}\right\} \quad (7.8)$$

adja meg, ahol

$$\hat{S} = \sum_j g_j \exp\left\{-\frac{E_j}{kT}\right\} \quad (7.9)$$

a fázisösszeg.

Itt érdemes egy rövid kitérőt tennünk a fázisösszeg körül, amely nyilvánvalóan divergens, ha (7.9)-be behelyettesítjük például a (6.2) Balmer-képletet, (a statisztikus súly $g_n = 2n^2$), n a főkvantumszám, Z a magtöltés, m és e az elektron tömege és töltése. A divergencia oka az, hogy torlódnak az energiaszintek $E = 0$ alatt. Ezekhez a szintekhez azonban $r_n = \hbar^2 n^2 / Z m e^2 \rightarrow \infty$ Bohr-sugár tartozik, az összes szintet nyilván csak akkor volna szabad figyelembe vennünk, ha a hidrogénatomunk egyedül volna a teljes térben. (Egy szem atomunk részére persze statisztikát csinálni tökéletes értelmetlenség volna.) Mivel csak véges térrész áll egy atom rendelkezésére, amelyben a mag Coulomb-potenciálja közel zavartalanul érvényesülhet, azon kívül pedig már más a potenciál, érezzük, hogy a probléma megoldása az lesz, ha erről a térrészről a valóságosnak megfelelő modellt alkotunk. Ezt többféleképpen lehet megtenni.

- * A legdurvábban úgy, hogy az atomok átlagos távolságának felénél elhelyezünk egy végtelen magas potenciálfalat, tehát merev falú dobozba zárjuk az atomot.
- * Realisztikusabb modellekben az ionizációs potenciál ΔE csökkenéséről szoktunk beszélni, ez a ΔE kiveszi (7.9)-ből a divergenciát okozó részt, mert úgymond az $E(n = \infty) - \Delta E$ energiatartományban már nem olyan állapotok vannak, amelyek a háborítatlan Coulomb-potenciálhoz tartoznak. Az egyszerűbb modellek ΔE kiszámítására valamilyen módon (közel) periodikus potenciált vesznek. Ez utóbbi megoldás fizikailag azért fogadható el, mert az elektronok a plazmában sokszor gyorsabban mozognak, mint az ionok, ezért nem minden állapot nélkülöz az a feltevés, hogy az ionok mintegy álló kristályrácsában száguldoznak az elektronok, a rácspontok pedig meglehetősen egyenletesen töltik ki a rendelkezésre álló teret.
- * Vannak olyan modellek, amelyek a mag Debye-leárnyékolását veszik alapul: a magtól távol a Coulomb-potenciál helyett $Z e^2 \exp\{-Dr\}/r$, szerint alakul a kötött elektron potenciális energiája, $D = 2e(\pi \sum_i n_i Z_i^2 / T)^{1/2}$ a leárnyékolási paraméter, Z_i az atomot körülvevő i típusú ion töltése, n_i ezek számsűrűsége, e az elektron töltése, T a plazma hőmérséklete. Mivel a Debye-potenciálban csak véges sok kötött állapot létezik, a problémát ez automatikusan megoldja.

* A legagyafúrtaabb modellek a plazmabeli kölcsönhatásokat nem ennyire leegyszerűsítve veszik figyelembe, hanem jóval körültekintőbben. A jegyzet írásakor a csúcsot a Mihalas–Hummer-féle modell jelenti, amelyben a Balmer-képlet érvényes $n = \infty$ -ig, de bevezetnek egy w_n valószínűséget, amely arról ad számot, hogy az n energiaállapot mekkora valószínűséggel kötött állapot. (7.8) és (7.9)-ban tehát g_n helyére $g_n w_n$ lép, és nyilván $1 - w_n$ valószínűséggel szabad állapot az n nívó, amelyre már nem (6.2) érvényes. Mivel $w_n \rightarrow 0$ gyorsan teljesül, ettől véges lesz S .

Az óvatosság azonban bármelyik modellnél helyénvaló, mert egy végtelen S -ből csináltunk végeset! Végül még rámutatunk arra, hogy \hat{S} -t feltétlenül végessé kell tenni, de ennek módjától szerencsére viszonylag kevés függ a csillaglégkör modelljében: a (7.9)-ban szereplő $-E_j/kT$ a csillagok légkörében előforduló $O(10^4)$ K hőmérsékleteken már az első gerjesztett állapotra ($j = 1$) is elég nagy, emiatt az atomok túlnyomó többsége alapállapotban van. A valóságban is létrejövő kötött állapotok száma mindenképpen véges és ha kevés van belőlük, ezek járuléka \hat{S} -hez az exponenciális miatt csekély. Ezért a gyakorlati számításokban \hat{S} -t egy véges összeggel szokás helyettesíteni, amelynek az alapállapotnak megfelelő első tagja jelentős $\exp\{0\} = 1$ miatt, a többi pedig kicsi korrekciót ad. A teljes szumma hőmérséklettől függő értékét az atomi színeképek tudorainál lehet megszerezni.

A divegens fázisösszeg a hidrogénnél nehezebb elemek kapcsán is fellép, mert a magasan gerjesztett állapotai minden atomnak, ionnak hidrogénszerűek.

7.1.3. A Saha egyenlet

Ha több különböző ionizációs fok van egymás mellett jelen, természetesen arra is kiterjeszhető a (7.7) Boltzmann-eloszlás, az eredmény a Saha-egyenlet lesz. Legyen egy kémiai elem i -edik állapota egy szabad állapot, jelölje ezt $i = 1$, amely tehát összetevődik egy v sebességű szabad elektrontól és egy ionból, a $j = 0$ -adik állapot pedig legyen az ionizálatlan alapállapot. Az ionizációs energia legyen E_1 . Ekkor

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{g_e g_1}{g_0} \exp\left\{- (E_1 + mv^2/2)/kT\right\}. \quad (7.10)$$

A kvantumstatisztikák szerint egy elektron a fázistér $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ térfogatát h^3 elemi cellanagysággal tölti ki, így a szabad elektron statisztikus súlya (a spin miatt a 2-es faktor)

$$g_e = 2 dx dy dz dp_x dp_y dp_z / h^3 = dx dy dz 8\pi p^2 dp / h^3 = 8\pi m^3 v^2 dv / (n_e h^3), \quad (7.11)$$

mert $n_e = (dx dy dz)^{-1}$ a számsűrűsége az elektronoknak. (7.11)-t beírjuk (7.10)-be, integrálunk az elektronok lehetséges v sebességeire, az eredmény

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = \frac{8\pi m^3 g_1}{h^3 g_0} e^{-E_1/kT} \int_0^\infty v^2 dv e^{-mv^2/2kT} = 2 \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-E_1/kT} \frac{g_1}{g_0}. \quad (7.12)$$

(g_0 , illetve g_1 az ionizálatlan alapállapot és az ionizált alapállapot statisztikus súlyai.)

(7.12)-ből leolvasható, hogy rögzített hőmérsékleten az n_e elektronnyomás fokozódása az ionizáció ellen dolgozik, amint az kvalitatív megfontolásokból is várható. Mivel E_1 exponenciálisban van és $E_1 > kT$, több ionizációs fok egymás mellett nem fordul elő számottevő koncentrációban, mert ha a következő ionizációhoz E_2 energia kell, annak koncentrációja már $e^{-(E_1+E_2)/kT}$ -szerese ($\ll e^{-E_1/kT}$) lesz az alapállapot n_0 koncentrációnak. Az atomi színeképekben $E_2 > E_1$ nagyon jól szokott teljesülni.

7.2. Lokális termodinamikai egyensúly

*Lokális termodinamikai egyensúly*ról (LTE) akkor beszélünk, ha egy plazmában a forrásfüggvény a lokális T hőmérséklethez tartozó a Planck-függvény ($S_\nu = B_\nu(T)$), és a Boltzmann-eloszlás, valamint a Saha-egyenlet is érvényes az adott T -vel, vagyis a rendszer a maximális entrópia állapotában van. A kibocsátott fotonok azonban, ha egyáltalán elnyelődnek, már nem a kibocsátási hely T hőmérsékletű plazmájában nyelődnek el. Ily módon $I_\nu(\tau, \theta)$ számottevően eltérhet a Planck-függvénytől. A Napon például $\tau_{\text{Rosseland}} \geq 0,01$ esetén már LTE uralkodik.

7.3. NLTE

Az eddigiekből nyilvánvaló, hogy ha egy sugárzó plazmában oly ritkák az ütközések, vagyis a plazma oly híg, hogy a rendszer nem tud a maximális entrópia állapotába kerülni, nem fog kialakulni LTE, tehát NLTE lesz. Ennek több oldala van.

Lehetnek az eltérések az LTE-től a különböző ionizációs fokok koncentrációi között, vagyis a Saha-egyenlet nem érvényes. Lehetnek az eltérések egy adott ionizációs fokon belül a Boltzmann-képlettől, valamilyen szint lehet jelentősen túlpopulált, például lézer- vagy mézerhatás miatt; ez utóbbira számos példát ismerünk a csillagközi gáz rádiósugárzásából, megfigyelünk bizonyos rádióvonalakokat, amelyek olyan molekulaszintek közötti átmenetekből származnak, melyeknek Boltzmann-eloszlás szerinti betöltéséhez szükséges hőmérséklet a molekulát atomjaira bontaná. A NLTE egy bizonyos formája az is, hogy a magasan gerjesztett szintek, amelyek S divergenciáját okozzák, nem (7.8) szerint vannak betöltve, itt azonban nem a statisztika a ludas, hanem a sugárzó atomról alkotott rossz modellünk, a ténylegesen létrejövő szintek populációját ugyanis (7.8) jól írja le.

Lehet NLTE amiatt is, hogy S_ν a hőmérsékleten kívül egyéb paraméterektől is függ, a legegyszerűbb példát erre is a lézerek vagy éppen az intersztelláris mézerek adják. Bizonyos kromoszférikus vonalakban is látszik NLTE hatása a Nap színeképeiben, ezek olyan erős vonalak, amelyeknek a centrumában sem lesz optikailag vastag a sugárzó közeg.

NLTE esetén egyenként számba kell vennünk a mikroszkópos folyamatokat, amelyek I_ν -t kormányozzák, illetve a rendszer lehetséges energiállapotainak betöltéséhez

vezetnek. Ha a sugárzás intenzitáseloszlása tér el a Planck-függvénytől, az elemi sugárzási folyamatokkal kell foglalkoznunk. Ha a Boltzmann-statisztika betöltési számaitól van jelentős eltérés, az atomi ütközési folyamatokkal kell foglalkoznunk. Ha a különböző ionizációs fokok n_i , $i = 0, 1, \dots$ számsűrűsége tér el a Saha-egyenlet által megadott értékektől, az ionizációra és rekombinációra vezető mikroszkópos folyamatokkal kell foglalkoznunk. Az itt megemlített folyamatok kvantitatív tárgyalása sok tekintetben az asztrofizika ma is lezáratlan területe. Tárgyalásukra még a 9. fejezetben röviden kitérünk, mivel a színképvonalak kiszélesedésének tárgyalására használt apparátus itt is használható.

A NLTE különböző aspektusai kapcsolatban állnak egymással, de ez a kapcsolat lehet egészen laza is. A NLTE kvantitatív tárgyalására nem térünk ki, csupán annyit mondunk el, hogy az összes i atomi állapot n_i betöltési számára egy

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \sum_j \dots + \dots \quad (7.13)$$

alakú elsőrendű differenciálegyenletet kell fölírunk, amelyben a két \dots az i állapotba vezető ütközési és sugárzási folyamatokat jelképezi, s végül az így adódó csatolt differenciálegyenlet-rendszert meg kell oldanunk, amely n_j -kre vonatkozó algebrai egyenletrendszerre redukálódik stacionárius esetben, amikor is $\partial n_i / \partial t = 0$.

7.4. A sugárzási egyensúly kialakulása

A sugárzási egyensúly — (4.7) — kialakulásához bizonyos idő szükséges. Ezt nagyságrendileg úgy becsülhetjük meg, hogy képezzük az állandó térfogaton vett c_V fajhővel egy térfogatelem hőenergiáját, és elosztjuk ezt a térfogatelem sugárzási teljesítményével, amit úgy kapunk meg, hogy a (2.36) Kirchhoff-törvénybe egy jól megválasztott κ opacitást írunk, majd $I_\nu = B_\nu$ -t tételezünk fel, integrálunk a frekvenciára átlagolunk a térszögére, vagyis a Stefan–Boltzmann-törvényt írhatjuk a nevezőbe:

$$\frac{2\pi c_V T}{\hat{\kappa} a T^4} \propto T^{-3}. \quad (7.14)$$

Idő dimenziójú mennyiséget kapunk így, s minél nagyobb a hőmérséklet, annál gyorsabban áll be a sugárzási egyensúly, amint azt kvalitatív megfontolásokból is vártuk. Ha reális csillaglégkör-modellekből vett c_V -ket és κ -kat helyettesítünk be (7.14)-be 10 és 1000 s közé eső időtartamokat kapunk.

E becslés olyan csillagoknál fontos, amelyeknek légkörében ilyen vagy ennél rövidebb karakterisztikus idejű folyamatok zajlanak le. Gyors pulzáció, konvekció, lökeshullámok jelenléte esetén kell megvizsgálni, hogy van-e idő a sugárzási egyensúly beállítására. Ha nincs, a csillagunk légkörének energiaháztartását egy fokkal nehezebb tárgyalni, mert a sugárzási folyamatokkal eltávozni nem tudó energia természetesen felhevíti a plazmát. Ilyenkor nincs szó stacionárius sugárzási energiaáramlásról, az időbeli változások nem elhanyagolhatók.

7.5. Hidrodinamikai kérdések

Különös hangsúllyal kell foglalkoznunk a csillag légkörének hidrodinamikájával, mivel ezen a területen ma is sok kutató dolgozik, lévén ez egyelőre lezáratlan terület, ahol még jelentős felismerések várhatók. Először pár szót a hidrodinamikai leírás jogosultságáról.

A hidrodinamikában a folyadékot, gázt, vagy plazmát az \mathbf{r} helyvektornál a t időpontban a $\rho(\mathbf{r}, t)$ sűrűséggel és a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességvektorral jellemezzük, továbbá a $P(\mathbf{r}, t)$ nyomással, ami ρ , az összetétel és a lokális hőmérséklet függvénye. E leírás akkor alkalmazható,

* ha \mathbf{v} , ρ , P egy akkora l_s skálaméretű térfogaton vett átlag, amely sokkal nagyobb, mint az átlagos távolság a részecskék között, és amelyen belül a folyadék (gáz, plazma) tulajdonságai változatlanok tekinthetők,

* valamint ha a részecskék l szabad úthossza és az l_s skálaméret sokkal kisebb, mint a rendszer L karakterisztikus mérete.

Tehát

$$L \gg l_s \gg l \quad (7.15)$$

esetén jogosult a hidrodinamikai leírás, ellenkező esetben a részecskék tér- és időbeli eloszlási függvényeivel írhatjuk le közegünket, amivel itt nem foglalkozunk. A

$$\text{Kn} = l/L \quad (7.16)$$

Knudsen szám tájékoztat a hidrodinamikai leírás alkalmazhatóságáról: $\text{Kn} \approx 1$ a határ, ami alatt jogos hidrodinamikai tulajdonságokkal rendelkező folytonos közegnek tekinteni egy folyadékot (gázt, plazmát). l megbecsülhető úgy, hogy vesszük a plazmát alkotó σ keresztmetszetű, v_0 sebességű részecskék két ütközés közötti t' időtartamának a szorzatát, s ezt egyenlővé tesszük az n számsűrűségű folyadékban az egy részecskére jutó átlagos térfogattal:

$$\frac{1}{n} = \sigma v_0 t' = \sigma l, \text{ vagyis } l = 1/n\sigma. \quad (7.17)$$

Pár számszerű adat. Alapállapotban levő hidrogén atom mérete $\sigma = r_0^2 \pi = 8.79 \times 10^{-17} \text{cm}^2$, $r_0 = (5,29 \times 10^{-9}) \text{cm}$ az első Bohr sugár, a Nap légkörében $n \approx 10^{17} \text{cm}^{-3}$, tehát $l \approx 10 \text{cm}$, míg $L \approx 400 \text{km}$, tehát $\text{Kn} \ll 1$ miatt a hidrodinamikai leírás teljesen jó. A Földnél a napszél sűrűsége $n \approx 10^3 \text{cm}^{-3}$, hőmérséklete $T \approx 10^5 \text{K}$, semleges hidrogén ilyen körülmények között elhanyagolható mennyiségben van, úgyhogy a de Broglie hullámhosszat kell vennünk egy részecske méretének. Ez (7.4) szerint számított $v_0 \approx 1.29 \times 10^{6,5} \text{cm/s}$ sebességű protonra $p_p = 2.16 \times 10^{-18} \text{gcm/s}$ impulzust, $\sigma = (h/p)^2 \pi = 2.97 \times 10^{-17} \text{cm}^2$ felületet jelent, amivel $l = 3.38 \times 10^{13} \text{cm} \approx 2 \text{Nap-Föld távolság} = 2L$, $\text{Kn} \approx 2$ miatt itt már a hidrodinamikai leírás nem jó.

Hidrodinamikai kérdésekben a kiindulás gyanánt felírjuk a Navier–Stokes-egyenletet:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \text{grad})\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \left[\text{grad } P + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \eta') \text{grad div } \mathbf{v} \right], \quad (7.18)$$

ahol a szimbólumok jelentése a szokásos: t az idő, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ a sebesség, $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ a tömegerő (azaz az egységnyi tömegre ható erő, vagyis egy tömegegységnyi anyag gyorsulása \mathbf{r} helyen t időpontban), $\rho(\mathbf{r}, t)$ a sűrűség, $P(\mathbf{r}, t)$ a nyomás, az η dinamikai, η/ρ kinematikai viszkozitás viszonylag jól ismert, ugyanez nem mondható el az η' -ről, ami kompresszibilis folyadékoknál jut szerephez. (7.18)-hez tartozik még a kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (7.19)$$

egy transzportegyenlet, amely a sugárzás áramlását írja le, amitől a hőmérséklet rétegződése függ, és a $P = P(\rho, T)$ állapotegyenlet. Mindez matematikailag nemlineáris differenciálegyenletek kezdetiérték-feladata, az egyenletek természetesen csatoltak, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ vektor-vektor függvény.

Inkompresszibilis folyadékokban $\partial \rho / \partial t = 0$, a fehér törpe csillagok légkörében, burkában lehet ez jó első közelítés.

Az η, η' viszkozitások arról adnak számot, hogy a közegben a nagyobb impulzusú helyek mennyi impulzust adnak át a kisebb impulzusú helyeknek, például határrétegek környezetében. A dimenziótlan

$$\text{Re} = \frac{\rho v^2}{L} / \frac{\eta v}{L^2} = \frac{\rho v L}{\eta} \quad (7.20)$$

Reynolds-szám a $\rho v^2/L$ tömegerő és a $\eta v/L^2$ viszkózus erők hányadosa, ennek kis értékeinél fordulhat elő lamináris (örvénymentes) áramlás.

Az asztrofizikai szempontból érdekes áramlásokban azonban mindig nagy a Reynolds szám, mert a csillagok és a csillaglégkörök nagy kiterjedésű forró plazmából állanak, amelynek a viszkozitása eleve csekély, ezért a (7.18) Navier-Stokes egyenlet helyett csupán a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \text{grad})\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P, \quad (7.21)$$

Euler-egyenlettel kell foglalkoznunk.

Vektoranalitikai azonosság

$$(\mathbf{v}, \text{grad})\mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}, \quad (7.22)$$

amiből következik, hogy turbulens (örvényes) áramlás alakul ki (vagyis $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$) minden olyan esetben, amikor a (7.22) nemlineáris tag már nem elhanyagolható az Euler, illetve a Navier-Stokes egyenletben. Ehhez legalább kétdimenziósnek kell lennie az áramlásnak.

Ha megszorozzuk a Navier-Stokes egyenletet ρ -val látjuk, hogy a turbulenciát okozó tömegerő (egységnyi térfogatra jutó gyorsulás) sűrűségét, $\rho(\mathbf{v}, \text{grad})\mathbf{v} \propto \rho v^2/L$ -t úgy kapjuk meg, hogy a gradiens-operátor hatását a rendszer L karakterisztikus méretével való osztással becsüljük meg. Hasonlóképpen a viszkóзитás (a Laplace-operátoros tag) hatását a Navier-Stokes egyenlet jobb oldalán a $|\mathbf{v}|/L^2$ hányadosal becsüljük meg. A kétféle erő hányadosát képezve így jutottunk a dimenziótlan Reynolds-számhoz, ami arról tájékoztat, hogy mennyire turbulens az áramlás.

A XIX. század második felében sok kiváló fizikus és matematikus munkássága nyomán az áramlásokról igen sikerült megtudni, általános megoldások keresése azonban reménytelen feladatnak bizonyult. Különösen igaz ez, ha még radiatív csatolás is van a különböző \mathbf{r} helyvektorú tartományok között, amint az a csillagok légkörében például a helyzet. Emiatt nagy a jelentősége azoknak a közelítéseknek, amelyekkel egyszerűsített megoldásokat lehet kapni, néhányat ezek közül itt sorra is veszünk.

7.5.1. Leegyszerűsített hidrosztatikus légkörmodell

A legegyszerűbb a hidrosztatikus eset, amikor a (7.18-7.21)-ben legtöbbször előforduló tagot, \mathbf{v} -t vesszük nullának. Ekkor a sűrűség stacionárius $\partial\rho/\partial t = 0$, gömbszimmetrikus, rétegződését

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = -g_{\text{eff}}\rho \quad (7.23)$$

integrálása adja meg, ahol $g_{\text{eff}} = g + \dots = GM/r^2 + \dots$ az "effektív" nehézségi gyorsulás (\mathcal{M} a csillag tömege). A szuperóriás csillagokat kivéve $g = GM/R^2$ állandónak tekinthető a csillag teljes légkörén belül. A pontok szimbolizálják azokat a gyorsulásokat, amelyek a csillaglégkörön belül állandónak vehető hatások, innen ered az effektív elnevezés. Ezek közül most a rotációt előre vesszük, g_{eff} többi tagját majd később vesszük számba.

A csillag forgástengelyétől mért polárszöget jelölje θ , szögsebességét ω , a csillaglégkörben

$$g_{\text{rot}} = -\omega^2 R \cos\theta \quad (7.24)$$

többletgyorsulás fog fellépni, vagyis $g_{\text{eff}} = g + g_{\text{rot}}$. $g_{\text{eff}} \approx 0$ esetén jelentős lehet a csillag lapultsága. A XXI. század elején technikai szempontból is lehetővé vált optikai interferometriával sikerült kimutatni, hogy több csillag is olyan gyorsan a forog, hogy a szétszakadás határán van. (Az optikai interferometria előtt csak a vonalas színképe alapján a Vegáról sejtettük, hogy ilyen.)

Most összekapcsoljuk (7.23)-t a szürke modellel, hogy elkészítsünk egy hidrosztatikus egyensúlyban lévő szürke modellt. Az állapotegyenlet legyen az ideális gázé:

$$P_g = \rho \mathcal{R}T / \mu \quad (7.25)$$

ahol μ az átlagos molekulatömeg hidrogénatomnyi egységekben (például $\mu = 2$ semleges hidrogéngázban, $\mu = 1$ atomos hidrogéngázban, $\mu = 1/2$ teljesen ionizált

hidrogén-plazmában), és egyelőre tekintsünk el a sugárnyomástól. (Meggjegyezzük, hogy például $P_g = \text{konst} \times \rho^{4/3}$ jönne (7.25) helyére, ha ideális gáz helyett többatomos gáz adiabatikus állapotegyenletét vennénk, ennek alkalmazása akkor jöhet szóba, ha gyorsan változik P , de \mathbf{v} még emellett is nullának tekinthető. Teljesen konvektív légkör esetén lehet ez első közelítés.) $d\tau = -\kappa_R dr$, (7.23), (7.25) és (5.16) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{g\mu\rho}{\kappa_R \mathcal{R}T} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \frac{g\mu\rho}{\kappa_R \mathcal{R}T_e(\tau + 2/3)^{1/4}}, \quad (7.26)$$

ahol κ_R monokromatikus abszorpciós koefficiens Rosseland-féle középértéke. Kis τ tartományokon belül a $\rho \propto \exp\{-r\}$ menet nyilvánvaló (7.26) alapján, de valamilyest pontos légkörmodellekhez (7.26)-t mindenképpen numerikusan kell integrálni, κ_R T -től és ρ -tól való függése miatt, az integrálás természetesen nem nehéz feladat.

Tulajdonképpen együtt van minden lényeges eleme egy csillaglégkör modelljének: (7.26)-ból kiszámíthatjuk a sűrűség rétegződését, (7.25) és (5.16) pedig a gáznyomás és a hőmérséklet eloszlását adja meg. Az itt bemutatott és a hasonló módon elkészíthető egyéb leegyszerűsített modellek egyrészt jó kiindulási rétegződéseket adnak a konstans fluxusú modellek iteratív numerikus elkészítéséhez, másrészt bemutatják, hogy melyek az alapvető paraméterek a csillagok légkörének modellezésében:

- a felszíni nehézségi gyorsulás, g , cm/s^2 egységekben vett értékének logaritmusát szokták megadni, ez 0–1 a szuperóriás csillagokban, 4 körül van a főszorozati csillagokban, 8–9 pedig a fehér törpéken,
- az effektív hőmérséklet, T_e ,
- és a kémiai összetétel, ami κ_ν -n és μ -n keresztül képviselteti magát egyenleteinkben, nem túl könnyen áttekinthető módon, mert κ_ν a hőmérséklettől is függ.

Barometrikus skálamagasság

A csillag (légkörének) anyagát izoterm ideális gáznak tételezve fel (7.23) a

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{g\mu}{\mathcal{R}T}\rho \quad (7.27)$$

alakot ölti, amit integrálva kapjuk, hogy

$$\rho(r) = \rho(r_0)e^{-H_0(r-r_0)}, \quad (7.28)$$

ahol

$$H_0 = \frac{g\mu}{\mathcal{R}T} \quad (7.29)$$

reciproka a barometrikus skálamagasság, szokták lokális barometrikus skálamagasságnak is nevezni, mert $P(r) = P(r_0)\exp[-H_0(r_0 - r)]$ is érvényes, $r \leq r_0$, $r_0 < R$, és R az a sugárérték, amelynél Kn már akkorára nő, hogy a hidrosztatikus leírás nem jogos. A (4.20) kapcsán mondott $\tau(R) = 0$ határ nyilván jó közelítése a légkör itt definiált határának. Ez tulajdonképpen a zérus határfeltétel problémája, amit természetesen figyelembe kell venni (7.23), (7.26) integrálásánál. Tehát hidrosztatikus, hidrodinamikai szempontból ugyanúgy nincs éles határa egy csillagnak, mint ahogy ezt a sugárirányú sebesség (7.6) eloszlása kapcsán jeleztük.

H_0^{-1} hozzávetőleges értéke a földi légkörre 8,8km ($\mu = 29$ -et véve), a Nap légkörére 616 km ($T = 5000\text{K}$ -t és $\mu = 1$ -t véve). Mivel a csillagban befelé haladva T nő, g csökken, H_0^{-1} nő.

Turbulens nyomás, sugárnyomás a csillaglégkörben

(7.23) annyira egyszerű, hogy az asztrofizika számítógépek előtti korszakában ez sokakat megkísértett arra, hogy P -be beépítsenek kifejezetten nem sztatikus, és természetüknél fogva nem izotrop jelenségeket, így például "turbulens" nyomást a sugárnyomás mellé. Becslésekre manapság is lehet használni ezeket a leegyszerűsített modelleket, természetesen valamilyen 3 dimenziós (3D) szimulációból kell venni a turbulenciáról számot adó nyomáskorrekciót.

(7.23) kapcsán még egyszer szemügyre vesszük a sugárnyomást, amelyet a 2.8. alfejezetben már tárgyaltunk, ott az abszolút fekete test falára gyakorolt sugárnyomást számítottuk ki. Most a csillaglégkör legkülső részében szeretnénk megbecsülni a $\kappa_{\nu,\rho}$ abszorpciós koeficiensű anyagra a sugárnyomás kifelé gyorsító (szelektív) hatását, oly módon, hogy (7.23)-ban g mellé még beteszünk egy g_{rad} tagot (pozitív előjellel, mert kifelé gyorsít) és elfeledkezünk arról, hogy ez a tag r -től erősen függ. Kiszámítása a korábbi eredményeink alkalmazásával a következő módon lehetséges.

A kifelé haladó I_ν intenzitású sugárnyalábból τ optikai mélységben θ irányban a $\rho d\sigma ds$ tömegelem elnyel

$$\rho d\sigma ds \kappa_{\nu,\rho} I_\nu(\theta, \tau) d\nu d\Omega \cos\theta \quad (7.30)$$

monokromatikus teljesítményt. Mivel a fotonok $\cos\theta h\nu/c$ falra merőleges (= $-x$ geometriai mélység irányú) impulzust hordoznak, (7.30)-et $\cos\theta/c$ -vel szorozva és a térszögre integrálva kapjuk meg a tömegelem által a sugárnyaláúbunkból időegységenként elnyelt kifelé irányuló impulzust (az $m = \rho d\sigma ds$ tömegelem \dot{p} impulzusváltozását), ami

$$\dot{p} = g_{\text{rad}} \rho d\sigma ds = \frac{\rho d\sigma ds}{c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^\infty d\nu \kappa_{\nu,\rho} I_\nu \cos^2\theta, \quad (7.31)$$

amiből

$$g_{\text{rad}} = \frac{1}{c} \int_\Omega \int \kappa_{\nu,\rho} I_\nu \cos^2\theta d\nu d\Omega \approx \frac{2\pi \kappa_M a T_e^4}{3c} = 3.95 \times 10^{-15} \kappa_M T^4 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \quad (7.32)$$

ahol κ_M (a cgs egységekben vett) $\kappa_{\nu,\rho}$ egy megfelelően választott átlaga, első közelítésben az (5.21)-ben definiált Planck-középtérték. Nyilván a $\theta = 0$ ($-x$) irány felé történik a gyorsulás, és értéke csak akkor nem 0, ha $I_\nu(\tau, \theta)$ anizotrop, mivel (7.31)-ben $\pi/2$ és π között integrálva θ szerint éppen $-\dot{p}$ -t kapnánk izotrop I_ν esetén. Az 5.1. alfejezetben megbeszéltek szerint az anizotropia teljesül is a csillag felületének közelében: nem követtünk el nagy hibát (7.32)-ban, amikor $I_\nu(0, \theta) = 0$ -t vettünk a $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ tartományra, míg a másik hemiszférába a kisugárzott monokromatikus intenzitást a T_e hőmérsékletű Planck-függvénnyel közelítettük. Végül megjegyezzük, hogy az m tömegelemünk által elnyelt impulzus izotrop módon sugárzódik ki, visszalökődési korrekció tehát nincs, ezért áll csak 2 (7.32) utolsó tagjának számlálójában, szemben (2.49) 4-ével.

Eddington-határ, diffúzió

Ha $-g + g_{\text{rad}} = 0$, a csillaglégkör anyaga lebegni fog, Eddington-határnak is szokták nevezni ezt az esetet. Szemléletesen szólva az Eddington-határnál a sztatikus gáznnyomás ugyanakkora, mint a sugárnyomás, az össznyomás gradiense pedig természetesen nulla, a légkör anyaga tehát folyamatosan párolog el, erős, stacionárius csillagszél alakul ki. Ez a párolgás sokkal erősebb, mint a (7.18) $W(u) \propto \exp\{-u^2\}$ miatti párolgás. Napunk légköre például elég messze van ettől, $\kappa_M \approx \frac{1}{400\text{km}} / 10^{-6} \text{gcm}^{-3} = 0,025 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$, amivel $T_e = 6000\text{K}$ -t feltételezve kapjuk, hogy $g_{\text{rad}} \approx 0,12 \text{cms}^{-2}$, ez jóval elmarad a Nap felszínének $g \approx 270 \text{ms}^{-2}$ -es nehézségi gyorsulásától. Ha κ_M -t reális modellekből vesszük, az így kapott g_{rad} körülbelül 10-20%-a az előbbi, igen elnagyolt becslésből kapott értéknek. A napszél ugyan van, de ez részben a napkitörésekből származik, és kis mértékben a Nap is párolog, mint minden csillag, mert a Maxwell-Boltzmann eloszlás (exponenciálisan csökkenő) nagysebességű részében v_r meghaladja a szökési sebességet.

Az itteni becslést a sugárnyomásra azért is csináltuk, hogy elhagyjuk az integrálást a frekvenciára (7.31, 7.32)-ban, amelyek monokromatikusán is igazak, és ez megadja a lehetőséget arra, hogy kiszámítsuk azt a szelektív gyorsítást, amelyet a kifelé áramló sugárzás gyakorol légkörünknek arra az összetevőjére, atomfajtájára, amelynek ν frekvencián van egy átmenete. Ha egy elemnek túl sok átmenete van, vagyis κ_ν -je nagy lesz azon frekvenciatartományban amelyben I_ν nagy, ez az elem elkezd kifelé diffundálni. Ilyen mechanizmussal a kémiai elemek diffúzió úton elkülönülhetnek egy csillag légkörében, ha a csillag légköre nagyon nyugodt, vagyis szigorúan sugárzási egyensúlyban van. Ekkor ugyanis a diffúzió $O(\text{cm/s})$ nagyságrendű makroszkopikus sebességével néhányszor 10^8 s alatt felépülhet egy kémiaileg inhomogén rétegződés a csillaglégkörök $O(1000)$ km-es skáláján. Nincs kizárva, hogy ez a mechanizmus A_p , A_m csillagokban működik annyira, hogy egészen furcsa kémiai összetételeket kever ki szinte azonos összetételű anyagból. Egy másik figyelemre méltó kvalitatív következtetés a szelektív radiatív gyorsításból az, hogy kis g -jú, tehát az Eddington-határhoz közel álló atmoszférával bíró (például szu-

peróriás vagy óriás) csillagokban a csillagszél kémiai összetételét akár befolyásolhatja is a sugárnyomás.

7.5.2. Egydimenziós áramlások

A Euler-egyenlet és a hozzá csatolt egyenletek megoldásában a bonyolultság következő lépcsőfoka az, amelynél a mozgás egydimenziós, például gömbszimmetrikus, ekkor a meghatározandó függvények $v(r, t)$, $\rho(r, t)$, a $T(r, t)$ hőmérséklet rétegződését pedig a sugárzás áramlása állítja be. Hidrodinamikai egyenleteink ekkor a

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + G \frac{\mathcal{M}}{r^2} = 0 \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{2v\rho}{r} = 0 \quad (7.34)$$

alakra egyszerűsödnek. Bár $(v, \text{grad}v) = v(\partial v/\partial r) \neq 0$, látnivaló, hogy (7.22) jobb oldalának második tagja nulla, tehát egy ilyen áramlásban a nemlineáris tag már föllép, de az áramlás mégsem lesz turbulens.

(7.34)-t beírhatjuk (7.33)-ba:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -G \frac{\mathcal{M}}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^2 \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \quad (7.35)$$

Pulzációs instabilitás – pulzáció lehetősége – akkor lép fel, ha $\partial v/\partial t$ periódikusan előjelet vált, ez szükséges feltétel. $v = 0$ esetén (7.33) (7.23) egyenletté egyszerűsödik. Pulzációs instabilitás vizsgálatokoz ezért jogos egy sztatikus $\hat{P}(r)$, $\hat{\rho}(r)$, $\hat{T}(r)$ rétegződésből kiindulni, és azt kell vizsgálni, hogy léteznek-e olyan $P(r, t) = \hat{P}(r) + \dots$, $\rho(r, t) = \hat{\rho}(r) + \dots$, $T(r, t) = \hat{T}(r) + \dots$ perturbációk, amelyekkel $\partial v(r, t)/\partial t$, $v(r, t)$ alternáló függvényné válnak egy nagyobb r intervallumban. Megfigyelhető pulzáció feltétele az, hogy a pulzációs instabilitás felnyúljon légkör $r \approx R$ tartományába.

$\partial P/\partial \rho = \mathcal{R}T(r, t)/\mu(r, t)$ használatával a hőmérséklet régződése és az átlagos molekulatömeg változása építhető be egyszerűsített modellünkbe. A sűrűség és a hőmérséklet (illetve nyomás) változása a t idő függvényében egy adott r helyen fogja megszabni, hogy ki tud-e alakulni valamilyen makroszkópikus mozgása a csillaglégkörnek, például periódikus $v(r, t)$ egy kiterjedtebb $r \approx R, r \leq R$ tartományban, vagyis gömbszimmetrikus pulzáció, amit radiális módusok gerjedésének is szoktunk nevezni. $\rho(r, t), P(r, t)$ értékét a plazma termikus tulajdonságai szabják meg, időbeli változásukat az alulról jövő besugárzás és a kisugárzás erdedőjéből kapjuk meg. (7.35) csak gömbszimmetrikus mozgásokról tud számot adni, pulzáció esetén az egyensúlyi helyzetbe visszakényszerítő hatás hidrodinamikai szempontból a P nyomás változása ezért szoktuk p-módusnak is nevezni az ilyen pulzációt. (7.33), (7.35) nemlineáris egyenlet v -re, ezért a kialakuló pulzácós amplitudókról is számot adnak.

Ha egy pulzációnál az egyensúlyi helyzetbe visszakényszerítő hatás a nehézségi erő, g-módusról beszélünk, ilyen "pulzáció" például az óceánok hullámzása, például

inkompresszibilis közegek ($\partial\rho/\partial t = 0$, $\partial\rho/\partial r = 0$) tudnak így "rezegni". Fontos megjegyezni, hogy a g-módusú pulzáció nem tud gömbszimmetrikus lenni. Nemradiális módusokról beszélünk ilyenkor, például fehér törpe, δ Scu csillagok tudnak g-módusban pulzálni, noha légköriük, burkuk csak közelítőleg inkompresszibilis plazmából áll. Természetesen lehet p-módusú pulzáció is nemradiális, ha mindhárom dimenzióban lehetséges az elmozdulás. Akár p-, akár g-módusú nemradiális pulzáció amplitúdója sokkal kisebb szokott lenni, mint a radiális módusoké.

A pulzáció felfogható úgy, mint egy perturbáció terjedése, ami a c_s hangsebességgel történik, ezt körülbelül (7.4) adja meg. Vertikális irányban a Nap fotoszféráján $\approx 400 \text{ km}/c_s < 1$ percen belül keresztülhalad egy hanghullám, de óriáscsillagoknál ez az idő már 10 perc nagyságrendjébe esik, szuperóriásoknál pedig a napot is elérheti. Ha a csillaglégkör elég gyorsan tud alkalmazkodni a sugárzási folyamatok által létrehozott változáshoz, vagyis a sugárzási egyensúly beállításához szükséges (7.14) idő elegendően rövid a hidrodinamikai állapot megváltozásához szükséges L/c_s időhöz képes, akkor jogos a *kvázisztatikus atmoszféra közelítés*, vagyis hogy a változó csillaglégkört sztatikus légkörmodellek sorozatával közelítjük a különböző t időpontokban. Ebben az esetben jó közelítés (7.23) alapján

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = g_{\text{eff}}(t), \quad (7.36)$$

vagyis időtől igen, de helytől nem függő effektív nehézségi gyorsulást tételezhetünk fel a pulzáció hajtómotorjának, mert $\rho^{-1}(\partial P/\partial r)$ a csillaglégkörön belül nem változik 2-3 százaléknál többet. Úgy kell elképzelni ezt, hogy a csillag pulzáló légköre be van zárva egy \ddot{R} gyorsulással mozgó liftbe, amelyben $g_{\text{eff}} = GMr^{-2} + \ddot{R}$ nehézségi gyorsulást mérne egy észlelő. (Tehát (7.36) szerint kombinált denzitómetrnek és barométernek használjuk a sztatikus légkörmodelleket.) A mozgásegyenlet pedig a

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -G \frac{\mathcal{M}}{r^2} + g_{\text{eff}}(t) + a^{(\text{dyn})}(r, t) \quad (7.37)$$

alakot ölti, ahol fizikai intuíciónkra hallgatva a jobb oldalra beírtuk az $a^{(\text{dyn})}$ dinamikus korrekciót, ami arról ad számot, hogy mennyi a gyorsulás különbsége egy kvázisztatikus és egy dinamikus légkörmodellben.

Radiális pulzációt végző csillagok tárgyalásánál fontos a (7.33-7.35) közelítés. Ilyen matematikailag kétdimenziós problémák megoldására hatékony numerikus algoritmusok léteznek akár Euler, akár Lagrange formalizmusban, ezek bemutatása azonban meghaladja jegyzetünk kereteit. Az itt bemutatott Euler-formalizmusban az egyenleteket egy rögzített koordináta-rendszerben írjuk fel. Lagrange-formalizmusban a tömegelemhez rögzítjük a vonatkoztatási rendszerünket, ezzel azonban itt nem foglalkozunk, noha ebben (7.18) egyszerűbb alakot ölt, mert eltűnik a nemlineáris tag. Arról viszont külön kell gondoskodni, hogy a tömegelemek ne tudjanak egymáson keresztülmenni.

Lökéshullámok

Megemlítjük még, hogy a térben egydimenziós tárgyalások gyakori velejárója a lökéshullámok fellépése, mivel ebben a tárgyalásmódban az anyag torlódásra hajlamosabb, mint a természetben, ahol a torlódások előli kitérésre van még két dimenzió.

Lökéshullám alatt azt értjük, hogy egy hidrodinamikai mennyiség határértéke egy felület két oldalán eltérő. Ha például ρ ez a mennyiség, és a felület mozog, amint az szokott lenni, akkor ez olyasmi jelenség, mintha egy fal mozogna a közegben, innen az elnevezés, amely a 70–80 évvel ezelőtti magyar nyelvű szakirodalomban még a szemléletesebb *lökőhullám* volt, előfordul a szakadási felület elnevezés is. A szakadási felületek mentén a meghatározandó függvények (például $\rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$,... nem differenciálhatók, ezért ezek \mathbf{r} tartományában (7.33-7.35) helyett integrál formában felírt összefüggésekkel kell dolgoznunk — energiaintegrált, stb. kell felírunk. A kvantitatív megértést nehezítő tényezők vázlatosan: a hullám két oldala között erős radiatív csatolás van, ami kiegyenlítő hatású, valamint az, hogy erős idealizálás a hidrodinamikai mennyiségek ugrásszerű változása a hullám két oldalán.

Egy konkrét példa: RR Lyrae csillagok légkörében a színek egyértelműen utal lökéshullámok jelenlétére a fénygörbe felszálló ágában. Elméleti modellezés is kiadta ezek létét, két egymás felé mozgó réteg alakul ki abból, hogy az előző pulzációs hullám által kilökött, majd szabadeséssel visszahulló légköri anyag összetorlódik a következő pulzációs hullám kifelé terjedő anyagával. A lökéshullám vastagságára azonban legföljebb pár száz méter adódott, mindez olyan gáznemű légkörben, amelyben a méretek $O(10^4)$ kilométerrel mérhetők. Egy ilyen papírvékony szakadási felület igen instabil, s helyette inkább valami turbulens módon keveredő nagy hőmérsékletgradiensű tartomány kialakulását sugallja fizikai intuíciónkon kívül a Rayleigh–Taylor-instabilitás ismerete is. Ez utóbbi laboratóriumi körülmények között úgy alakul ki, hogy gravitációs erőterben egy sűrűbb folyadékot rétegzünk egy ritkábbra, a kísérletek szerint mindig elkeveredés az eredmény. Ilyen típusú keveredés van nyilván a lökéshullám két oldala között is, aminek következtében a szakadási felület helyén egy turbulensen keveredő zóna kialakulása várható.

7.5.3. 3D áramlások

Manapság nagysebességű számítógépekkel lehet numerikus megoldásokat találni (7.18-7.21)-höz a legáltalánosabb, a 3 dimenziós esetben is: az egyenletekben előforduló deriváltakat a lehető legegyszerűbb véges differenciákkal helyettesítik, s az így kapott algebrai egyenleteket megoldják egy véges rácsra. Ezen algebrai egyenletek ismeretlenei a keresendő függvény értékei a rácspontokban. Sokszor a rácsot nem lehet előre rögzíteni, hanem a megoldáshoz kell illeszteni: ott, ahol a meghatározandó függvények erősen változnak, sűrű rács kell, míg másutt ritkíthatók a rácspontok. (Több tízezer egyenletből álló egyenletrendszer \approx több tízezer rácspont jelenti a 90-es években a csúcst.) A részleteknek könyvtárnyi irodalma van, amelyre itt nincs hely kitérni. Matematikailag nézve partikuláris megoldások kaphatók így,

amelyek között asztrofizikai célokra is alkalmas jónéhány: például léteznek olyan programok, amelyek a Nap konvekciós zónájának áramlásait már 3 dimenzióban tudják szimulálni, tájékoztatásul annyit, hogy hosszuk mintegy 20 000 FORTRAN utasítás.

Csak címjegyzékszerűen megemlítjük, hogy numerikus integrálásokról turbulenciák keletkezését például hajók úszásakor numerikusan is egész jól értjük — ez különben egyszerű problémának számít az asztrofizikai problémákhoz képest. Kicsit hasonló, bár bonyolultabb probléma egy rendezett mozgás felaprózódása: amikor például elindul fölfelé egy konvektív elem egy csillag konvekciós zónájának aljáról, de természetesen a rendezett mozgás kinetikus energiája folyamatosan disszipál a torlódás és a turbulenciák kialakulása miatt, valamint az elem melegebb lévén a környezeténél, hűl is. Emiatt a konvektív elem egy l_k hossz megtétele után elkeveredik a környezetével, ezt a fenomenologikus leírásból származó l_k -t *keveredési hossz*nak nevezik, s értékét az imént említett numerikus integrálásokkal is lehet becsülni. (A keveredési hossz fogalma L. Prandtl (1875-1953) német fizikustól származik, aki azt eredetileg inkompresszibilis és közel izoterm folyadékok áramlásaiban fellépő turbulens elkeveredés tárgyalására vezette be. Az asztrofizikába főként E. Böhm-Vitense szintén német fizikus, asztrofizikus vezette be.) Pontosabb meghatározása a következő: ha megindul egy áramlás, egy rendezett mozgás egy tértartományban, az itteni $\vec{v}(\mathbf{r})$ sebesség átlagértéke nullától különbözik, dt idő múltán újra átlagoljuk a sebességet az $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \vec{v}dt$ pont körüli tértartományra, s így megyünk lépésről lépésre. Keveredési hosszának azt az $l_k = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ távolságot nevezzük, amelynél a sebesség átlagértéke nullára vagy az eredetinek egy hányadára csökken. Ennek a definíciónak a szemléletes tartalma nyilvánvaló: megszűnt az eredetileg rendezett mozgás, vagyis elkeveredett a környezetével a konvektív elem. Eredeti kinetikus energiája hővé, turbulens mozgás kinetikus energiájává disszipált, impulzusát pedig átadta környezetének. Az így definiált l_k a keveredés kinematikai, hidrodinamikai aspektusát emeli ki. Természetesen l_k függ az induló elem méretétől, dimenziótlan számot kapunk, ha ezzel normáljuk, ez már jobban kifejezi a keveredési folyamat fizikáját, függeni fog az induló elem sebességétől, a környezet kompresszibilitásától és viszkozitásától, mindezek részletezésére azonban nem térünk ki. A csillagburkok és csillagbelső szerkezetének számításához szükséges konvektív fluxusról e szemléletes kép nem ad számot, mivel itt csupán az elkeveredés jelenségét írtuk le.

Itt kell még megemlítenünk, hogy (7.21,7.19) és a hozzá csatolt radiatív egyenletek közvetlen megoldásával való kísérletezés helyett sokszor jól jön, hogy bizonyos egyszerűsítésekkel jelentősen csökkentjük a probléma dimenzióinak számát, a megmaradó kevés változóra a tömeg, az energia, az impulzus megmaradási tételéből könnyebben megoldható egyenleteket nyerhetünk, amelyeknek a száma is nyilván kevesebb.

Mikro- és makroturbulencia

A turbulenciák kapcsán szólnunk kell még arról, hogy kimondottan a csillagok légkörében beszélünk mikro- és makroturbulenciáról aszerint, hogy a turbulens elemek karakterisztikus mérete mekkora. Ha ezek olyan kicsik, hogy az általuk létrehozott sebességmező figyelembe vehető úgy, mint egy ξ_t korrekció a (7.4) által definiált legvalószínűbb sebességhez, vagyis

$$v_0^2 = 2kT/m + \xi_t^2, \quad (7.38)$$

akkor beszélünk mikroturbulenciáról. A makroturbulencia definíciója pedig az, hogy az általa létrehozott sebességmező (ha nem a Napon nézzük, a felénk eső hemiszférára átlagolt sebességmező) már nem követi a Maxwell-sebességeloszlást, sőt esetleg nem is pótlólagos vonalkiszéledést hoz létre, hanem például hullámhossz-eltolódást vagy aszimmetrikus vonalprofilt a színképben. Úgy sejtjük, hogy a kritikus karakterisztikus méret körülbelül a $\tau \approx .1$ optikai mélységet elérő tartomány mérete, egy ekkora tartomány még gyakorlatilag átlátszó, s ha benne nagy sebességű turbulens mozgások vannak, az azok által létrehozott $W(\xi_t)$ sebességeloszlás gyaníthatólag jól közelíthető a (7.6) haranggörbével.

A bizonytalan fogalmazás magyarázata a fogalom történetében van. A mikroturbulencia ξ_t sebessége eredetileg (az 1930-as években történt bevezetésekor) egy empirikus illesztő faktor volt: ha a (7.4) által definiált v_0 helyére a megfelelően választott ξ_t -vel kiegészített v_0 -t tettek (7.38) szerint (7.6)-be, a vonalak Dopplerszélessége egységesen megnőtt, s így a különböző vonalokból meghatározott légköri gyakorisága a kémiai elemeknek megváltozott. Bevezetésével sikerült elérni azt, hogy a csillagszínképeknek az akkoriban egyre gyakrabban elvégzett kvantitatív analíziséből eltűnt egy szisztematikus hiba: az egyes kémiai elemek légkörbeli gyakorisága így csak random szórást mutatott, ha azt az elemek különböző erősségű színképvonalaiából határozták meg. ξ_t egységes volt több kémiai elem vonalaiból meghatározva! Csak jó 30 év múltán fűzték aztán magyarázatként ehhez a tényleges, makroszkópos, turbulens mozgást, amelynek léptéke az imént jelzett méret. E feltételezett mozgás nagyobb léptékű, mint a hőmozgás, csak szubszónikusnak képzelhető el, ami a $\xi_t^2 < 2kT/m$ korlátot rója ki rá, mivel v_0 körülbelül a hangsebességgel egyenlő a légkör plazmájában.

7.5.4. Konvekció

Konvekciónak nevezzük a csillag anyagának szimultán föl-le mozgását, keveredését. *Konvektív instabilitásról* akkor beszélünk, ha a csillag (légkörének) anyaga nem stabil a függőleges elmozdulásokkal szemben, de ezek az elmozdulások nem rendeződnek össze olyan globális rezgéssé, mint a pulzáció. Akkor következik be ilyen instabilitás, ha a konvekcióval való energiátanszport hatékonyabb a sugárzásinál.

A konvektív instabilitás kritériumát K. Scharzschild (1874-1916) fogalmazta meg:

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} < \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}}. \quad (7.39)$$

Úgy kell ezt értenünk, hogy vesziünk egy sugárzási egyensúlyban lévő modellt, abban kiszámítjuk a hőmérséklet gradiensét, vagyis (7.39) jobb oldalát. (A modell éppenséggel lehet az 5. fejezetben megismert szürke modellünk is.) A következő lépés, hogy adiabatikus folyamatokat: konvektív cellák fel- és leszállását feltételezve kiszámítjuk ugyanezen modell hőmérséklet-rétegződését. (Feltesszük, hogy cellák olyan gyorsan mozognak, hogy a létezésük ideje alatt sem keveredéssel, sem radiatív úton számottevő hőt nem tudnak cserélni a környezetükkel, ezért tekinthető adiabatikusnak a folyamat.) Amelyik r (τ) intervallumban aztán teljesül az egyenlőség, a konvekció megindul, s abban ez fogja kiszállítani az energiát, különben pedig a sugárzás. A konvektív és a radiatív fluxus aránya fontos paramétere légkörmodellünknek, de a csillagok mélyéről alkotott modelljeinknek is, megbízható számítása nem tartozik a könnyű feladatok közé. A konvekció szerepe kettős: egyfelől homogénizálja a közeget a mozgások miatti turbulens keveredés által, másfelől a konvektív fluxus számottevően hozzájárul az energia szállításához a csillag belsejében, burkában. A csillaglégkör $0 \leq \tau \leq 3$ tartományában azonban a konvektív fluxus már elhanyagolható, gyakorlatilag nullának vehető a közeg csekély sűrűsége miatt.

Inkább csupán a fizikai lényeg bemutatására számítsuk ki egy szürke modell radiatív hőmérsékleti gradiensét például $\tau = \kappa r$ feltevésével:

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} = \frac{3^{1/4}}{4^{5/4}} T_e \left[\kappa r + \frac{2}{3} \right]^{-3/4} \kappa \approx T_e \kappa^{1/4} r^{-3/4}. \quad (7.40)$$

Nyilvánvalóan a konvektív instabilitás javára fog dolgozni, ha kifelé haladva a csillagban κ valahol megnövekszik. Például a csillagok külső részében (nemritkán közvetlenül a légkör alatt) a kifelé csökkenő hőmérséklet miatt egy kémiai elem (hidrogén vagy kicsit mélyebben a hélium) megszűnik ionizált lenni, s mivel egy H-(He-)atom sokkal nagyobb, mint egy proton (α részecske), a fényelnyelési hatáskeresztmetszete (κ -ja) is sokkal nagyobb lesz, ezért a rekombináció (7.39) teljesülése felé mozdítja el az egyensúlyt, s ezt tetézi még az ionizációs energia felszabadulása, mert ez pótlólagos energia, aminek el kell távoznia, de ezt akadályozza a fölötte lévő rétegek nagy opacitása. κ -mechanizmusnak is hívják ezt a fajtáját a konvektív instabilitásnak. Ilyen konvektív instabilitás rendszerint felnyúlik a légkörbe is, főként annak mélyebb rétegibe, F5-nél késeibb színeképosztályú csillagok légkörében biztosan jelen van. Ugyanakkor a legkör legkülső tartományában κ csökkenése miatt mindig a radiatív fluxus kerül tulsúlyba.

Megjegyezzük még, hogy a csillagok magja igen gyakran konvektív, s a magreakciók miatt a kémiai összetétel ugrásszerűen változik a mag és a burok határán. Ez rendszerint κ ugrásszerű csökkenésére vezet, s ezért a konvektív instabilitás megszűnik, s a konvektív energiátranzsport helyére a radiatív lép. A kémiai összetétel éles határvonalának fennmaradása azonban nemigen képzelhető el egy $O(10^7)$ K

hőmérsékletű plazmában, valamiféle elkeveredést várunk. Tárgyunkhoz ez az instabilitás nem tartozik, de megemlíjtjük, hogy a szakirodalomban *szemikonvekció*nak nevezik azt a jelenséget, amikor ez az éles határ a kémiai összetételben nem marad meg, hanem diffúzióval elmosódik, s ez a konvektív instabilitás határát kifelé tolja, mivel a nagy κ -t okozó kémiai összetétel kifelé tolódik. A probléma igen nehezen kezelhető numerikusan, amelyben a diffúzió által valamiféle makroszkópos mozgás nélküli elkeveredés van (innen ered a szemikonvekció elnevezés), de a konvektív energiafluxus gyakorlatilag nulla.

Megint inkább csak a fizikai lényeg bemutatására felvázoljuk egy adiabatikus modell hőmérséklet-rétegződését. Ezt sokkal nehezebb megkapni, mert nem egy egykomponensű gáz adiabatikus tágulása zajlik le (mint például egy gőzgépben), hanem föl- és leszálló elemek (adiabatikusan) tágulnak, húzódnak össze, s ezen kívül keverednek a környezetükkel, ezért $\mathbf{v} = 0$, amit (7.23) levezetésekor feltételeztünk, teljesen illuzorikus. Ezért csak becslés céljára engedhető meg, hogy (7.23)-t integráljuk a

$$P = \text{konst} \times \rho^\gamma \quad (7.41)$$

adiabatikus állapotegyenlettel, $\gamma = c_P/c_V$ az állandó nyomáson és hőmérsékleten vett fajhők hányadosa. Helyettesítsük (6.7.3)-t (7.23)-ba:

$$\text{konst} \times \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} = -g\rho, \quad (7.42)$$

amit a változók szétválasztásával nem nehéz integrálni, az eredmény:

$$\text{konst} \times \rho^{\gamma-1} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} gr. \quad (7.43)$$

Behelyettesítjük ide az adiabatikus tágulásra vonatkozó $T = \text{konst} \times \rho^{\gamma-1}$ -t, amiből

$$\left| T(r) \right|_{\text{ad}} = \frac{\gamma-1}{\gamma} gr, \quad (7.44)$$

mely összefüggés r szerinti deriváltja szerepel (7.39) bal oldalán. Eszerint a nagy g stabilizál a konvekcióval szemben, s γ megváltozása (például ionizáció miatt) szintén kihat a konvektív egyensúlyra. E leegyszerűsített megfontolás alapján sejtjük, hogy a fehér törpék légköre miért van radiatív egyensúlyban, s hogy a szuperóriások kiterjedt légköre miért instabil.

Mindez roppant egyszerű, a konvekció részletes kvantitatív modellezése, ami végső soron egy adiabatikus $T(r)$ megadásával egyenértékű, még ma is lezáratlan területe az asztrofizikának, mert egy kompresszibilis, turbulens közeg 3 dimenziós mozgásait kell modelleznünk. Ha semmi lényegbevágó egyszerűsítéssel nem élünk, erre ugyan megvan az Euler, illetve a Navier–Stokes-egyenlet a tartozékaival együtt — állapotegyenlet, kontinuitási egyenlet, de a különböző hőmérsékletű tartományok között még a radiatív csatolás is fennáll. Elvi nehézség nincs, de a valamennyire

már megbízható numerikus megoldások a jelenlegi szuperszámítógépek számára is kemény diót jelentenek. Ha azonban nem ragaszkodunk a teljes körű leíráshoz, az energia és az impulzus megmaradásának felírása is ad már két egyenletet, s ez sokat elárulhat a konvekcióról.

A konvekciót modellező asztrofizikus hasonló helyzetben van, mint egy gépészmérnök: hevítéssel — DQ energiát közölve a közeggel — növekszik egy közeg belső energiája és a termodinamika első főtétele szerint még PdV munkát szeretnénk végeztetni azzal:

$$DQ = dE + PdV. \quad (7.45)$$

Erre akkor van lehetőség, ha a rendszer belső szabadsági fokai (például hőmozgás, ionizáció) már nem tudják elnyelni a DQ hőmennyiséget, és ezért a közeg "rákényszerül" a térfogati munka végzésére. Aztán a lehűlésnél pedig $DQ < 0$, tehát hő távozik el, és a közeg összehúzódik.

DQ lehet a csillag mélyéből radiatív úton jött energia, hűlésnél pedig a kisugárzás miatti veszteség. Hevülésnél kulcsszereplő az a hőmennyiség, amit közegünk az r helyen elnyel (ez a κ abszorpciós koefficiensstől függ), vagy valami helyben felszabadult energia: például bekövetkezik egy kémiai elem rekombinációja a kifelé csökkenő hőmérséklet miatt. A közeg hidrodinamikai sajátosságaitól függ, hogy az elnyelt vagy a helyben felszabadult energia mozgásba hozza-e a közeget, s ha igen, milyenbe: a viszonylag rendezetlen mozgásállapotot megtettesítő konvekció alakul-e ki, vagypedig globális rezgések jönnek létre, vagyis elkezd a csillag pulzálni. A konvektív és a pulzációs instabilitás között tehát nem húzható éles határvonal, amit kifejez az is, hogy szakirodalomban szokás beszélni konvektív pulzációról is, amikor olyasfajta pulzáció jön létre, amely során az r sugárnál lévő dr vastag héjban a θ , ϕ polárszögek függvényében olyan sok nódusa van a $v_r(r, \theta, \phi)$ sugárirányú sebességkomponensnek, hogy ez nem sokban különbözik már egy konvektív közegben a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sebességmezőtől. E megközelítése a konvekciónak azért szimpatikus, mert ennek során lemondunk arról a nagyfokú egyszerűsítésről, amit a $\mathbf{v} = 0$ jelentett az Euler-egyenletben, de ennek ellenére mégsem kell a közeg bonyolult hidrodinamikájával, a konvektív tartomány impulzusviszonyaival foglalkoznunk, hanem csak energiátétellel van dolgunk.

Felsorolunk futólag két kérdést, amelyekre a válasz a konvekció részletes, hidrodinamikai modellezésével lesz majd megkapható, talán a nem túl távoli jövőben.

- (a) A csillag légkörének viszkózitása ugyan csekély, arra nem elég, hogy lefékezze a meginduló anyagot, de arra igen, hogy együtt működve a nemlináris taggal a Navier-Stokes egyenletben turbulenssé tegyen egy áramlást. Ezek a turbulenciák aztán végül egy elinduló konvektív elemet, elemi cellát felapróznak, elkevernek a környezetével, s a radiatív folyamatok is a cella környezetbe való beolvadása felé hatnak, a melegebb, tehát felszálló elemek hűlnek, a hidegebb, tehát leszálló elemek pedig melegszenek. A környezetben való feloldódás, vagyis az azzal való elkeveredés nyilván egy átlagos távolságon belül következik be, amelyet l_k keveredési hosszának nevezünk. Ha (7.39) l_k

magassággal följebb is teljesül, a konvektív elemek az elkeveredett anyagból természetesen újra kialakulnak.

- (b) A konvektív elemek melegebbek a környezetüknél, ezért sűrűségük kisebb, felhajtóerő hat rájuk, amíg le nem hűlnek. A folyamat részletes kiszámítása azonban ismét igen nehéz numerikus feladat. Ha jól modellezünk, megtudhatjuk, hogyan indul el egy konvektív elem, hol és hogyan áll meg, amikor megérkezett egy stabil, radiatív rétegződés alá, vagy hogyan keveredik el a környezetével, majd a lehűlt anyag hogyan áramlik vissza a fölfelé áramló konvektív elemi cellák között.

A (b) ponttal kapcsolatos a konvekció Ledoux-féle feltétele, amellyel nem foglalkozunk, mert a csillag légkörének külső részében, ahol a vonalas színkép kialakul, az általa leírt jelenség nem játszik szerepet, a energia áramlása szinte kizárólag radiatív.

Keveredési hossz és barometrikus skálamagasság

Visszatérünk még egy kicsit a keveredési hosszhoz, ami nagyon hasznos paramétere a konvektív tartományok modellezésének, és jól ragadja meg a fizikai lényegét. A konvekció részleteinek hiányos ismerete ellenére is lehetővé teszi például a csillagok belsejében, légkörében az energia áramlásának modellezését, s ha majd a részletek megismerésében jelentősen sikerül előrelépni, nem kell mindent előlről újra számolni, hanem csak a keveredési hossz megfelelő értékű modelljeit kell elővenni. Ezek a modellek aztán legalábbis jó alapot fognak adni a kiinduláshoz, ha finomításra lesz szükség. Másrészt, esetleg jól megválasztott megfigyelésekkel például a keveredési hossz tényleges értékéről tudhatunk meg többet.

A Nap külső konvektív zónája körülbelül 200000 km mély, tehát a konvektív instabilitás többszáz H_0^{-1} vastagságú, a Nap fotoszférája viszont csak körülbelül 400 km vastag, ami alig több, mint H_0^{-1} . Itt km/s nagyságrendjébe eső sebességeket látunk, amiből tisztán empirikusan arra gondolhatunk, hogy a konvekció szubsónikus áramlásokat hoz létre, fő hatása a hőmérséklet gradienseinek csökkentése, ha azt egy radiatív modell gradiensehez hasonlítjuk.

A csillagban (légkörében) a barometrikus skálamagasság az egyetlen kitüntetett távolságskála. Ezért (fizikai intuícóra hallgatva) a lokális $T(r)$ hőmérséklethez tartozó

$$\alpha = l_k H_0 \quad (7.46)$$

dimenziótlan paraméterrel szokták jellemezni a konvekciót. Nyilván nemigen lehet konvekcióról beszélni $\alpha < 0.1 - 0.5$ esetén, mert ez körülbelül azt jelenti, hogy a konvekció nem változtatja meg a rétegződést: ilyenkor azonban jogos némi turbulens nyomást is belevenni (7.23)-ba. Mindazonáltal α értéke körül teljes a bizonytalanság, numerikus becslések és a konvekcióval kapcsolatos intuíciók szerint szokás kiválasztani a legelfogadhatóbbnak tartott értékét. (Ez $\alpha = 1 - 2$ a XX., XXI. század fordulóján.) α bevezetése azért volt mégis hasznos, mert a csillag légkörének szerkezete szempontjából fontos konvektív energiatranszportot parametrikusan leírja. A

szakirodalomban publikált nagy csillagléggör modelleszaládokban az α paramétert meg szokták adni. (Csak utalunk itt arra, hogy α értékét gyakran szabad paraméternek tekintik, s úgy állítják be, hogy a csillag számított mérete a megfigyelt nagyságú legyen. Ez az eljárás α értékét tulajdonképpen a csillagbelső modellezéséből határozza meg, ezért némi habozás mindenképpen jogos, amikor ezt átvisszük egy fizikailag meglehetősen más típusú tartományra, a léggörre.)

Ha l_k nagy a konvektív zóna méretéhez képest, a sokáig ható felhajtó erő miatt a lassan elkeveredő konvektív cellák egész jelentős kinetikus energiával érkehetnek a konvektív zóna felső határához, oda, ahol az egyenlőtlenség fordul (7.39)-ben, és tehetetlenségük miatt nyilván nem állanak meg azonnal. Konvektív túllövésről, penetrációról szoktunk ilyenkor beszélni. Ez inkább a csillagok burkában, belsejében fontos, hatása a radiatív hőmérsékletretegződés megzavarásában nyilvánul meg: a lassan lefékeződő, elkeveredő konvektív cellák még számottevő "konvektív" fluxust hoznak be a sugárzási egyensúlyban lévő tartományba. Ennek a kérdéskörnek a kvantitatív tárgyalása a konvekció Ledoux-féle feltételével lehetséges, de erre nem térünk ki, mert a jelenség csak a szubfotoszferikus rétegekben jelentős. Léteznek ugyan olyan léggörmodellek, amelyek a penetrációt is figyelembe veszik, de a léggör τ tartományában a fizikai mennyiségek eltérése igen csekély a penetráció nélküli modellekhez képest

A konvekció megállása mellett legalább annyira kérdéses a megindulásának mi-kéntje is: mekkora fel és leszálló elemek, mekkora sebességgel alakulnak ki abban a tartományban, amelyben (7.39) teljesül. Ezekről a kérdésekről azonban csak numerikus szimulációk elvégzése után lehet nyilatkozni, amelyek során a Navier-Stokes egyenletet és a hozzá tartozó egyenleteket kell megoldani viszkózus, kompresszibilis és turbulens közegekre. A mi leegyszerűsített formalizmusunk a konvekció ezen részleteiről nem tájékoztat, a szakirodalomban jelenleg föllelhető, lényegesen nagyobb elméleti fizikai apparátust használó numerikus megoldások alapján sem rajzolható meg egységes kép a konvekció részleteiről.

8. fejezet

A MONOKROMATIKUS ABSZORPCIÓS KOEFFICIENS KISZÁMÍTÁSA

A monokromatikus abszorpciós koefficiens egy kiszámítási módjával megismerkedtünk a 2. fejezetben a telegráf egyenlet megoldása kapcsán. A plazmát ott a dielektromos állandóval, a mágneses permeabilitással és az elektromos vezetőképességgel jellemeztük, ezekből megkaptuk, hogyan nyelődik el a monokromatikus elektromágneses hullám a plazmában. A probléma illetően tárgyalása teljesen kielégítő volt a XX. század elején, amióta azonban tudjuk, hogy a plazmát alkotó atomok, ionok bizonyos frekvenciákon nagyon erősen nyelik el a sugárzást, míg másutt egyáltalán nem, érezzük, hogy a valóságos folyamatokhoz közelebb álló modell kereteiben adhatunk csak számot a színeképvonalak keletkezéséről, s főleg azok profiljáról, azaz $F_\nu(0)$ pontos alakjáról a vonalon belül.

Egy-egy atomfajta elektromágneses átmeneteinek mai tudásunk szerinti teljes leírását a kvantumelektrodinamika keretei között végezhetjük el. A témakör a sugárzás és az anyag kölcsönhatása címszó alatt szerepel az elméleti fizikai könyvekben, és legalábbis hidrogénszerű ionokra teljes a tárgyalás, és még a héliumszerű ionok néhány átmenetére léteznek számítások numerikus eredményekig bezárólag.

Szerencsére azonban az $F_\nu(0)$ kiszámításához szükséges 1–2 százalékos pontosságot egyszerűbb elméleti keretek között is megkaphatjuk, és ezek külön általánosítás nélkül alkalmazhatók bonyolultabb elektronhéjú atomokra is. κ_ν kiszámítására a fejezetünkben követett út nagyjából megfelel a történeti fejlődésnek, ezért is érdekes

végigmenni rajta. Az imént említett anyagi állandókkal jellemzett, folytonosan elnyelő plazma helyére úgy építhetünk fel a valóságnak jobban megfelelő modellt, ha elemi oszcillátorokkal dolgozunk. A klaszszikus fizikából ismeretesek ilyenek, és nyilván a sugárzó atomok is tekinthetők bizonyos fokig elemi oszcillátoroknak, mert rendelkeznek a klasszikus oszcillátorok attribútumaival. Ezek közül számunkra azok fontosak, hogy jól meghatározott sajátfrekvenciáikon (és annak szűk környezetében) nyelik el vagy sugározzák ki az elektromágneses sugárzást, és gyorsan változó külső elektromágneses mező kényszerrezgésbe hozhatja őket, amikor is sugároznak a klasszikus fizika törvényei szerint, mert bennük töltések gyorsulva mozognak. A kényszerrezgés az oszcillátorban ω_0 sajátfrekvenciával rezegni tudó töltés és az oszcillátor helyénél az ω frekvenciával rezgő (külső) elektromágneses mező kölcsönhatásából jön létre. Ha beállt a stacionárius állapot, ennek a folyamatnak a kvantummechanikai analógja a fényelnyelés és az indukált emisszió, amelyeken keresztül tehát a kvantummechanikai és klasszikus fizikai tárgyalásmódot összeköthetjük. Megjegyezzük még, hogy a klasszikus sugárzáselmélettel ugyanúgy vannak nyitott problémák, mint a kvantumelektrodinamikai tárgyalással, ezeket azonban jegyzetünkben nem tárgyaljuk.

Fejezetünk programja:

először be fogjuk vezetni az Einstein-féle átmeneti valószínűségeket,

utána elektromágneses sugárzás szóródását fogjuk tanulmányozni klasszikus oszcillátorokon, ez a Lorentz-féle elmélet,

s végül kvantummechanika felhasználásával azt fogjuk kiszámítani, hogy egy sugárzó atom hány darab klasszikus oszcillátornak felel meg.

Az atomi energiaszintek kvantáltságát tehát figyelembe vesszük, de az elektromágneses mezőét nem: ez utóbbit végig klasszikusan tárgyaljuk.

8.1. Az Einstein-féle átmeneti valószínűségek

Legyen egy atomunk két energiaszintje E_j , E_m , legyen $E_j < E_m$, a szintekhez tartozó statisztikus súly g_j , g_m , n_j és n_m jelölje a szintek betöltési számát (dimenziójuk szám, illetve számsűrűség: atomszám/térfogat), $E_m - E_j = h\nu_{mj}$. (A továbbiakban ν_{mj} indexét el fogjuk hagyni.) A lehetséges átmenetek a következők: spontán és indukált emisszió ($m \rightarrow j$), abszorpció ($j \rightarrow m$). Ez utóbbi két folyamat akkor lehetséges, ha jelen van az atomunk helyén egy u_ν energiasűrűségű elektromágneses mező. A három folyamatot (sorrendben) jellemezzük az A_{mj} , B_{mj} , B_{jm} Einstein-féle átmeneti valószínűségekkel úgy, hogy legyen $A_{mj}n_m$ a spontán emissziók, $B_{mj}n_m u_\nu$ és $B_{jm}n_j u_\nu$ pedig az indukált emissziók és az abszorpciók száma időegységenként. Innen leolvasható hogy A_{mj} dimenziója idő^{-1} , B_{mj} , B_{jm} -é pedig $(\text{idő} \times \text{energiasűrűség})^{-1}$, és hogy A_{mj} , B_{mj} , B_{jm} egy atomot jellemző mennyiségek, tehát a (2.34) alatt definiált $\kappa_{\nu,at}$ felel meg nekik a fenomenológikus sugárzáselméletben.

Nyilvánvaló, hogy a spontán emisszió következtében atomjaink teljesítménye $A_{mj}n_m h\nu$, az indukált emisszió $B_{mj}n_j h\nu$ teljesítménnyel járul az mérleghez, az u_ν sugárzásból elnyelt teljesítmény pedig $B_{jm}n_j h\nu$. Ez utóbbi összefüggés alapján meg is kapható $\kappa_{\nu,at}$ és B_{jm} kapcsolata a következőképpen. Atomunk monokromatikusan nyel el sugárzási teljesítményt, ezért $d\nu$ -vel és dt -vel nem kell törődnünk, a térfogatot egységnek választva $d\sigma ds = 1$, ezzel (2.32) és (2.34) alapján az elnyelt monokromatikus teljesítmény kéféleképpen kifejezve

$$4\pi\kappa_\nu I_\nu = B_{jm}n_j u_\nu h\nu \quad (8.1)$$

lesz, mert I_ν izotrop. $u_\nu = 4\pi c^{-1}I_\nu$ miatt a kapcsolat

$$\kappa_{\nu,at} = \frac{B_{jm}h\nu}{c}. \quad (8.2)$$

Termikus egyensúlyban az $m \rightarrow j$ és a $j \rightarrow m$ átmenetek száma megegyezik, tehát

$$(A_{mj} + B_{mj}u_\nu)n_m = B_{jm}u_\nu n_j, \quad (8.3)$$

írja le a sugárzás és az anyag kölcsönhatását, érvényes a Boltzmann-statisztika, vagyis

$$\frac{n_m}{n_j} = \frac{g_m}{g_j} e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \quad (8.4)$$

és

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (8.5)$$

(8.3)-et elosztjuk n_m -mel, behelyettesítjük (8.4) reciprokát, kapjuk, hogy

$$A_{mj} + B_{mj}u_\nu = \frac{g_j}{g_m} e^{h\nu/kT} B_{jm}u_\nu, \quad (8.6)$$

ebbe rendezés után behelyettesítjük u_ν -t (8.5)-ből:

$$A_{mj} = \left[B_{jm} \frac{g_j}{g_m} e^{h\nu/kT} - B_{mj} \right] \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} / \left[e^{h\nu/kT} - 1 \right]. \quad (8.7)$$

Ez az egyenlet akkor lesz azonosság, ha a benne szereplő átmeneti valószínűségek között az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$B_{jm} = g_m B_{mj} / g_j \quad (8.8)$$

és

$$A_{mj} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{mj}. \quad (8.9)$$

(8.9) jelentősége az, hogy a spontán emisszió átmeneti valószínűségét megadja a kvantummechanika keretében tárgyalható fényabszorpció, illetve indukált emisszió átmeneti valószínűségével. Ha ugyanis szigorúan a kvantummechanika keretei

között maradunk, akkor a stacionárius állapotok közötti spontán emisszióról nem tudunk számot adni, mert ez csak a kvantumelektrodinamika keretei között tárgyalható. Ez utóbbi fáradságos alkalmazásának szükségességét takarítottuk meg (8.9) levezetésével, ami során feltételeztük a termikus egyensúlyt.

8.1.1. Egy gerjesztett állapot élettartama

Kiszámítjuk az m szint T_m élettartamát. A t idő függvényében a szint betöltési számára

$$\frac{dn_m}{dt} = - \sum_j A_{mj} n_m \quad (8.10)$$

áll, ahol az összes lehetséges j végállapotra összegezni kell, amelybe lehetséges spontán emisszió. (8.10) megoldása

$$n_m(t) = n_m(0)e^{-t/T_m}, \quad (8.11)$$

ahol

$$T_m = \left(\sum_j A_{mj} \right)^{-1}. \quad (8.12)$$

8.1.2. A_{mj}, B_{mj} megmérése, lézer, mérer

Felhasználva (8.3) összefüggésben a (8.8,8.9) eredményeinket és szorozva az átmenet $h\nu$ energiájával kapjuk, hogy

$$\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left(1 + \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \right) B_{mj} n_m h\nu = B_{jm} u_\nu n_j h\nu. \quad (8.13)$$

A bal oldal egy emissziós színekvonal frekvenciatartományában megjelenő teljesítményt adja, tehát közvetlenül mérhető fizikai mennyiséget, monokromatikus intenzitást. Laboratóriumi körülmények között (8.13), (8.9) alkalmazásával megmérhetjük az egyes színekvonalakhoz tartozó Einstein-féle átmeneti valószínűségeket, ha ismerjük u_ν -t, amire egyébként (8.5) Planck-függvény igen jó közelítés lehet jól megválasztott kísérleti körülmények között. Ez azért fontos, mert bonyolult elektronkonfigurációval rendelkező atomok, molekulák átmeneti valószínűségeit sokszor szinte lehetetlen kiszámítani, illetve lényegesen kevesebb erőfeszítést igényel a mérés, mint a számítás. (A számítások egzakt végrehajtásához ugyanis a kvantummechanikai soktestprobléma megoldására volna szükség. Mivel ez egyelőre csak igen erős elhanyagolásokkal lehetséges, ha vannak, az asztrofizikai célokra inkább a laboratóriumi méréseket kell előnyben részesíteni, a szükséges 1–2 százalékos pontosságot azokból könnyebb megkapni.)

Ha (8.13) bal oldalából azt is látjuk, hogyan aránylik egymáshoz az indukált és a spontán emisszió által kisugárzott teljesítmény. Nyilvánvaló, hogy termikus egyensúlyban is $h\nu/kT \ll 1$ esetén az indukált emisszió sokkal valószínűbb, ez

a lézerjelenség fizikai alapja. Növekvő $h\nu/kT$ -vel aztán a spontán emisszió kerül túlsúlyba. Az indukált emisszió túlsúlya akár mézezerjelenség kialakulásához is vezethet hideg, híg atmoszférájú csillagokban, például vörös óriásokban, ahol az alacsony légköri hőmérséklet megengedi olyan molekulák létezését, amelyeknek a termrend-szerében léteznek olyan egymáshoz közeli szintek ($h\nu/kT \ll 1$), amelyek között nagy a B_{m_j} átmeneti valószínűség.

8.1.3. Átmeneti valószínűségek a folytonos színekben

Két kötött szint között írtuk föl (8.3)-t, azonban semmi akadályja annak, hogy általánosítsuk k -sz típusú átmenetekre is, Einstein–Milne-relációknak hívjuk ilyenkor. Részletekbe bocsátkozás nélkül csak annyit említünk itt meg, hogy radiatív ionizációról, spontán és indukált rekombinációról adnak ilyenkor számot a megfelelő átmeneti valószínűségek, és a számítások során a folyamatok szereplője még egy elektron is, amelyre az energiamérlegben tekintettel kell lenni.

Most pedig áttérünk a k -sz átmenetek szokásos tárgyalásához a 8.1. szakaszban foglaltak általánosításával: bevezetjük az Einstein–Milne-relációkat. Legyen j egy diszkrét állapot, számsűrűsége legyen n_j , a vizsgált elem ionizációs energiája a j állapotból legyen E_j , a v sebességű elektronok sűrűsége és az ionok számsűrűsége $n_e(v)$ és n_1 .

Miként a 8.1. szakaszban, most is feltesszük a termikus egyensúlyt, vagyis az ionizációk és a spontán + indukált rekombinációk száma azonos, ehhez jön még az, hogy a szabad elektronok sebességeloszlása a (7.3) Maxwell-eloszlás. Az ionizáló foton energiája fedezi a szabad elektron kinetikus energiáját is, tehát

$$h\nu = E_j + m_e v^2/2, \quad (8.14)$$

és $h d\nu = m_e v dv$. A $\nu, \nu + d\nu$ frekvencia intervallumba eső foton által egy atom $v, v + dv$ közötti sebességű elektronra vezető ionizációjának időegységenkénti száma legyen $B_{j,v} I_\nu d\nu$. Egy v sebességű elektron által okozott spontán és az indukált rekombinációk száma legyen $[A_{v,j} + B_{v,j} I_\nu] v dv$. A v faktort azért tettük be, mert az ütközések számától így lesz független $A_{j,v}$, $B_{j,v}$, hordozva kizárólag az atomi tulajdonságokat.

Az ionizációk és rekombinációk száma egyenlő, tehát

$$n_j B_{j,v} I_\nu d\nu = n_1 n_e(v) (A_{v,j} + B_{v,j} I_\nu) v dv. \quad (8.15)$$

(8.14) felhasználásával kapjuk, hogy

$$n_j B_{j,v} I_\nu = n_1 n_e(v) (A_{v,j} + B_{v,j} I_\nu) h/m_e, \quad (8.16)$$

amiből kifejezzük I_ν -t, ami termikus egyensúlyban éppen B_ν :

$$\frac{2h\nu^3}{c^2 [\exp(h\nu/kT) - 1]} = \frac{A_{v,j}}{B_{j,v} m_e n_j / h n_1 n_e(v) - B_{v,j}}. \quad (8.17)$$

Behelyettesítjük a (7.3) Maxwell-eloszlást:

$$n_e(v)dv = N_e W(v)dv = 4N_e v^2 m_e^{3/2} e^{-m_e v^2/2kT} dv / \pi^{1/2} (2kT)^{3/2}, \quad (8.18)$$

a (7.12) Saha-egyenletet:

$$\frac{n_1 N_e}{n_j} = 2 \frac{g_1}{g_j} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-E_j/kT}. \quad (8.19)$$

Mivel

$$\frac{m_e n_j}{h n_1 n_e(v)} = \frac{g_j N_e h^3 m_e}{2h g_1 (2\pi m_e kT)^{3/2}} e^{E_j/kT} \frac{\pi^{1/2} (2kT)^{3/2}}{4N_e v^2 m_e^{3/2}} e^{m_e v^2/2kT} = \frac{g_j h^2}{8g_1 \pi m_e^2 v^2} e^{h\nu/kT}, \quad (8.20)$$

azonossággá akkor válik (8.17), ha

$$A_{v,j} = 2h\nu^3 B_{v,j}/c^2 \quad (8.21)$$

és

$$B_{j,v} = \frac{8\pi m_e^2 v^2 g_1}{h^2 g_j} B_{v,j} = \frac{4\pi c^2 m_e^2 v^2 g_1}{h^3 g_j \nu^3} A_{v,j}. \quad (8.22)$$

Ezek felelnek meg a (8.8,8.9) egyenleteknek. $B_{j,v}$ megmérhető, vagy egyszerű elektronkonfigurációjú atomokra, molekulákra számítható: a j diszkrét állapotból egy v sebességű szabad elektron keletkezésének a valószínűségét kell kiszámítani. A folyamat neve fotoionizáció, s ennek megbízható elméleti tárgyalása, az eredmények összevetése laboratóriumi kísérletekkel részben ma is folyó atomfizikai kutatások témája. Ezek ismertetése meghaladja jegyzetünk kereteit, az elméleti kérdésekhez kitűnő bevezetés H. A. Bethe és E. E. Salpeter Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Systems c. munkája (Handbuch der Physik XXXVI., Springer, Berlin, 1957).

8.2. Rezgő töltés sugárzása a klasszikus elektrodinamika keretei között

Figyeljük meg, hogy atomunk monokromatikusan sugároz, ha a sugárzás leírására az A_{mj} , B_{mj} , B_{jm} átmeneti valószínűségeket használjuk. Ezen egyszerűsítésen túl kell lépniünk, az első lépcsőfok alább következik.

Vegyünk egy e töltésű, $\dot{\mathbf{v}}$ gyorsulását (és m_e tömegű) töltést, amely oszcillátorunkban rezeg, $\dot{\mathbf{v}}$ és \mathbf{v} párhuzamos. Az oszcillátortól nagy \mathbf{r} távolságban a t időpontban keltett (retardált) elektromos és mágneses térerősség

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\dot{\mathbf{v}}(t - r/c)}{c^2 r} \sin\theta \mathbf{i}, \quad (8.23)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\dot{v}(t - r/c)}{c^2 r} \sin\theta \mathbf{j}, \quad (8.24)$$

\mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} egységvektorok egy jobbsodrású koordináta-rendszert feszítenek ki, a \mathbf{k} egységvektor \mathbf{r} irányába mutat, θ a \mathbf{k} és $\dot{\mathbf{v}}$ közötti szög — amint mindez a Liénard–Wiechert-potenciálokból sorfejtésekkel és megfelelő elhanyagolásokkal megkapható.

Mint ezt a 2. fejezetben említettük, \mathbf{E} és \mathbf{H} merőlegesek egymásra, a Poynting-vektor pedig mindkettőre, ezért ennek egy r sugarú gömb felületére vett integrálja

$$w(t) = \int \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} d\mathbf{A} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi r^2 c^3} \sin^3\theta r^2 d\phi d\theta = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3} \quad (8.25)$$

lesz, ami oszcillátorunk sugárzási teljesítménye. (Az integrálás $\sin^3\theta = \sin\theta(1 - \cos^2\theta)$ helyettesítéssel végezhető el.) Érdemes felhívni figyelmünket két dologra.

- A gyorsulás $\dot{\mathbf{v}}$ irányához képest $\theta = 0, \pi$ felé a sugárzás intenzitása nulla, tehát a kisugárzott intenzitás nem izotrop
- továbbá $w(t) \geq 0$, tehát a kisugárzott teljesítmény sosem negatív.

Ha például ω_0 sajátfrekvenciájú harmonikus oszcillátor a rezgő töltés

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t, \quad a = \dot{v} = -\omega_0^2 x_0 \cos\omega_0 t, \quad (8.26)$$

a teljesítményének átlagértéke a $[0, t' = \nu^{-1}]$ rezgési ciklusra

$$w(\omega_0) = \frac{1}{t'} \int_0^{t'} \frac{2e^2 \omega_0^4 x_0^2}{3c^3} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{e^2 \omega_0^4 x_0^2}{3c^3}. \quad (8.27)$$

(Ebben a fejezetben $\omega = 2\pi\nu$ -t a körfrekvencia jelölésére fogjuk használni. A kapcsolódást (8.26)-hez az jelenti, hogy $\omega_0 = 2\pi\nu_{mj}$. (8.27) kiszámításához $\int \cos^2 ax dx = x/2 + (\sin 2ax)/4a$ -t kell felhasználni.)

8.2.1. Sugárzási csillapodás

Oszcillátorunk gyorsuló töltése sugározni fog, az emiatt elveszített (8.25) teljesítménye formálisan felfogható úgy is, mint egy \mathbf{F}_{rad} fékező erő teljesítménye:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} \mathbf{v} + \frac{2e^2 a^2}{3c^3} = 0. \quad (8.28)$$

Egydimenziós mozgásról lévén szó, \mathbf{v} , \mathbf{F} , $\dot{\mathbf{v}}$ párhuzamosak, ezért a továbbiakban a v , F , \dot{v} jelölést alkalmazzuk rájuk. Parciálisan integráljuk (8.28)-t egy teljes rezgési ciklusra:

$$\int_0^{t'} F_{\text{rad}} v dt + \frac{2e^2}{3c^3} \left[va \Big|_0^{t'} - \int_0^{t'} \dot{a} v dt \right] = 0. \quad (8.29)$$

A középő tag harmónikus oszcillátorra (8.26) szerint 0, a fékező erőre marad tehát

$$F_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{a} = -m_e \gamma v. \quad (8.30)$$

(8.30) jobb oldalával pedig definiáltuk a γ klasszikus csillapodási tényezőt, amelynek dimenziója nyilvánvalóan idő^{-1} . A (8.26) szerint rezgő harmónikus oszcillátorra

$$\gamma = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3m_e c^3} = 6,25 \times 10^{-24} \omega_0^2. \quad (8.31)$$

Fizikailag ez azt jelenti, hogy az e töltésű m_e tömeg sugárzási veszteségét mint egy közönséges surlódási diszszipációt fogjuk fel. Tárgyalásmódunkban a sugárzásból eredő fékező erő pontos értéke $F_{\text{rad}} = -2e^2 a^2 / 3c^3 v$ volna. A mozgásegyenlet linearizálása kedvéért a (8.29) integrálással leegyszerűsítettük a problémát, a sugárzási fékező erőnek azt a részét elhanyagoltuk, amely ugyan nem nulla a rezgés során, de átlagértéke nulla. (A sugárzási fékező erő $2e^2 \dot{a} / 3c^3$ értéke megegyezik a jóval bonyolultabb, elméleti fizikai szempontból kifogástalan tárgyalásból kapható értékkel.)

Az e index m_e -ben utal arra, hogy oszcillátorunkban elektron rezeg a Lorentz-féle klasszikus elektronelmélet szerint. Például 500nm-es fényre $\omega_0 \approx 3,8 \times 10^{14} \text{s}^{-1}$, tehát $\gamma = 8,9 \times 10^5 \text{s}^{-1}$, vagyis a csillapodás igencsak lassú, amint azt mindjárt belátjuk. Oszcillátorunk mozgásegyenlete

$$m_e \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x \right) = 0, \quad (8.32)$$

ez homogén, másodrendű, állandó együtthatós közönséges differenciálegyenlet. Karakterisztikus egyenlete $e^{\Lambda t}$ behelyettesítésével kapható meg:

$$\Lambda^2 + \gamma \Lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (8.33)$$

ennek gyökei

$$\Lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}, \quad (8.34)$$

amiből

$$x(t) = x_0 (k_1 e^{\Lambda_1 t} + k_2 e^{\Lambda_2 t}) = x_0 e^{-\gamma t/2} \cos((\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} t) \quad (8.35)$$

van összhangban (8.26)-gyel ($k_1 = k_2 = 1/2$). Látnivaló, hogy körülbelül 4×10^8 rezgés után csökken oszcillátorunk amplitudója e-ed részére, és hogy a frekvencia is az $(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}$ értékre módosult. A mozgásegyenletet lineárisra tevő $va|_0^{t'} = 0$ helyettesítés jogosságát alátámasztja az, hogy az átlagolás időtartama csekély a mozgás lecsengésének időtartamához képest.

Megjegyzés.. A (8.29) integrálással és $va|_0^{t'} = 0$ feltevésével linearizáltuk a (8.32) mozgásegyenletet. Az

$$m_e \left(\ddot{x} - \frac{2e^2}{3m_e c^3} \dot{x}^2 + \omega_0^2 x \right) = 0, \quad (8.36)$$

nemlineáris differenciálegyenletet kapnánk, ha a (8.32) mozgásegyenletbe a fékező erő (8.30) közelítő értéke (átlagértéke) helyére az egzakt $F_{\text{rad}} = -2e^2 \dot{x}^2 / 3c^3 x$ erőt tennénk. Noha (8.36) nemlineáris, az oszcillátorunk x_0 amplitudója mégis lehet tetszőleges,

$$x = x_0 f(t) \quad (8.37)$$

alakú, amint erről behelyettesítéssel könnyű meggyőződni.

Itt rávilágítunk tárgyalásmódunk korlátaira. Töltésünk a harmonikus rezgőmozgást létrehozó $F_{\text{külső}} = -m_e \omega_0^2 x$ erő hatására gyorsulva mozog, tehát a (8.32) mozgásegyenlet $m\dot{v} = F_{\text{külső}} + 2e^2 \ddot{v} / 3c^3$. Ha a külső erőteret a t' időpontban kikapcsoljuk (vagyis elvágjuk a direkciós erőt adó "rugót", amitől $F_{\text{külső}} = 0$ lesz), a mozgásegyenletnek két megoldása létezik: a triviális $\dot{v} = 0$, vagyis $v = \text{konstans}$ következik az egyenlet homogenitásából, de ezenkívül a $\dot{v} = \dot{v}(0) \exp[(3c^3/2e^2)t]$ gyorsuló mozgás is megoldás, tehát a fékező erő exponenciálisan gyorsítani tudja az erőmentes tartományba lépett töltést. (A probléma bővebb kifejtése és megoldása megtalálható a Landau-Lifsic Klasszikus erőterek című könyv 75. paragrafusában. Az itt vázolt formalizmuson belül nincs megoldás erre az abszurdításra.)

8.2.2. Kényszerrezgést végző oszcillátor, Lorentz-profil

Tárgyalásmódunkban a következő lépcsőfok az, hogy hozza kényszerrezgésbe a klasszikus oszcillátorunkat egy az oszcillátor $2x_0$ rezgési tartományán belül homogén elektromágneses mező $E_0 \cos \omega t$ elektromos komponense. A mozgásegyenlet

$$m_e \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x \right) = e E_0 \cos \omega t, \quad (8.38)$$

ami (8.32)-től csak annyiban tér el, hogy inhomogén egyenlet. Megoldása a homogén egyenlet általános megoldása — tehát (8.35) — plussz az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása. Ez utóbbit kereshetjük az

$$x(t) = k_3 \cos \omega t + k_4 \sin \omega t \quad (8.39)$$

alakban, amelyet (8.38)-be helyettesítve kapjuk $\sin \omega t$ és $\cos \omega t$ együtthatójából, hogy

$$k_4(\omega_0^2 - \omega^2) - k_3 \gamma \omega = 0, \quad (8.40)$$

$$k_4 \gamma \omega + k_3(\omega_0^2 - \omega^2) = e E_0 / m. \quad (8.41)$$

Ezek megoldása után (8.39) partikuláris megoldás az alábbi alakot ölti:

$$x(t) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \frac{e}{m_e} E_0. \quad (8.42)$$

Ez azonban (8.38) számunkra érdekes megoldása is egyben, mivel a homogén egyenlet (8.35) általános megoldása gyorsan lecseng, az előbbi számpéldánkban például $O(10^{-6})$ s alatt, s marad egyedül a (8.42) által leírt kényszerrezgés. Megjegyezzük, hogy elektromágneses hullámok hatását egy oszcillátorra addig helyes ily módon tárgyalni, amíg a létrejövő kényszerrezgés nemrelativisztikus sebességekkel zajlik. Mihelyt a mozgás \dot{x} sebessége megközelíti c -t, a Lorentz-erő ($e\dot{x}H_0\cos\omega t/c$) számottevővé válik, s ekkor megjelenik a kényszerrezgésben egy \mathbf{E} -re és \mathbf{H} -ra merőleges mozgás, ami az itteni leegyszerűsített tárgyalásmódunkat lehetetlenné teszi.

Kétszer differenciálva (8.42)-et megkapjuk \dot{v} -t, ezt behelyettesítjük (8.25)-ba és átlagolunk a $t' = 2\pi/\omega$ kényszerrezgési periódusra, (8.27) analógájára kapjuk, hogy kényszerrezgést végző oszcillátorunk átlagolt sugárzási teljesítménye az ω körfrekvencia értékénél:

$$\begin{aligned} w_1(\omega) &= \frac{2e^4\omega^4 E_0^2}{3m_e^2 c^3 t'} \int_0^{t'} \left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \right)^2 dt \\ &= \frac{e^4\omega^4 E_0^2}{3m_e^2 c^3 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

A (8.43)-ban felírt átlagolt teljesítmény az I_ν monokromatikus intenzitásban jelenlévő $E_0 \cos 2\pi\nu t$ kényszerrezgést kiváltó elektromágneses síkhullámból származik. Legyen $\sigma(\omega)$ az oszcillátorunk szórási keresztmetszete (dimenziója felület, $\kappa_{\nu,at}$ megfelelője, l. (2.34)). Az I_ν monokromatikus sugárzási intenzitásból az oszcillátorunk által elnyelt teljesítmény

$$w(t) = \frac{1}{4\pi} \int \sigma(\omega) I_\nu d\Omega = \sigma(\omega) I_\nu, \quad (8.44)$$

mert az ω körfrekvencián az izotropnak feltételezett I_ν intenzitásból bármelyik irányból jöhet a kényszerrezgést kiváltó $E_0 \cos\omega t$ síkhullám. (8.44)-ban I_ν -t még átlagolnunk kell egy rezgési ciklusra, hogy w_1 -gyel összehasonlítható mennyiséget kapjunk. Vesszük (8.38) szerint $|\mathbf{E}| = E_0 \cos\omega t$ -t, a Poynting-vektor (2.17) kifejezése és (2.11) — $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$ — miatt

$$w_2(\omega) = \overline{\sigma(\omega) I_\nu} = \sigma(\omega) \frac{c}{4\pi t'} \int_0^{t'} E_0^2 \cos^2\omega t dt = \sigma(\omega) \frac{cE_0^2}{8\pi}. \quad (8.45)$$

A két $w(\omega)$ teljesítmény egyenlő, így (8.43,8.45) összehasonlításából következik, hogy oszcillátorunk szórási keresztmetszete

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (8.46)$$

Ez atomszámra vonatkoztatott monokromatikus abszorpciós koefficiens, olyan mennyiség, amelyet (2.34) alatt definiáltunk, az eltérés mindössze annyi, hogy körfrekvenciára vonatkozik. *Lorentz-profil*nak nevezzük (8.46)-t.

Megjegyezzük, hogy az itt modellezett folyamat koherens szórás: az elnyelt ω körfrekvenciájú sugárzást ugyanazon frekvencián kaptuk vissza, de a (8.25)-ba a (8.23,8.24)-ből átkerült $\sin^2 \theta$ miatt nem gömbszimmetrikus lesz egy-egy oszcillátor sugárzása. Ha az elnyelt sugárzás például síkban polarizált, vagyis az \mathbf{E}_0 vektoroknak van kitüntetett térbeli iránya, a kijövő sugárzás is polarizált lesz. Mivel a csillagok légkörében I_ν kifelé irányul, az itt vázolt hatás miatt csekély mértékű polarizált fény is elhagyja a csillagot. Ezt a Nap színképében már sikerült is megfigyelni, a polarizálatlan sugárzás kizárásával. A Nap második színképének nevezik ezt a polarizált komponenszt, ennek aránya a polarizálatlan intenzitáshoz képest 10^{-5} nagyságrendjébe esik.

(8.46) igen éles rezonanciát ad $\omega = \omega_0$ -nál, mert (8.31,8.46) szerint $\sigma(\omega_0)/\sigma(2\omega_0) = \omega_0^4 \gamma^{-2} \omega_0^{-2} / (8\omega_0^4 / 9\omega_0^4) \approx \omega_0^2 / \gamma^2$, ami látható fényre 10^{18} nagyságrendjébe esik.

8.2.3. Thomson-szórás, Rayleigh-szórás

A *Thomson-szórás*t kapjuk, ha fény szabad elektronokon szóródik, ekkor $\omega_0 = \gamma = 0$. Hatáskeresztmetszete a frekvenciától függetlenül

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4} = 6,65 \times 10^{-29} \text{m}^2. \quad (8.47)$$

Ez a szórási folyamat korai csillagok légkörében számottevő, mert az elektronkoncentráció nagy bennük a magas hőmérséklet miatt. Mivel a csillagok légkörében az elektronkoncentráció a $n_e = 10^{12} - 10^{16} \text{cm}^{-3}$ között szokott lenni (az első adat szuperóriásokra, a második fehér törpékre vonatkozó tipikus érték), kapjuk, hogy csupán a Thomson-szórás miatt egy csillag légköre egyenletes elektronsűrűséget feltételezve $s = \kappa^{-1} = (n_e \sigma)^{-1} \approx 10^{13} - 10^9 \text{cm}$ távolságon válna optikailag vastaggá, ami körülbelül 3 nagyságrenddel több, mint a csillagokon ténylegesen megfigyelt légkörvastagság. Megjegyezzük még, hogy (8.47)-et nyugodtan lehet alkalmazni néhány keV energiáig, előlött a Compton-szórás lépne föl, amikor is a kisugárzás más frekvencián történik, tehát rugalmatlan szórásról van szó. Ennek azonban a csillagok légkörében nincs jelentősége, mert a részecskék, fotonok átlagos energiája az eV nagyságrendjébe esik.

A *Rayleigh-szórás*nál a fény olyan anyagon szóródik, amelynek ω_0 sajátfrekvenciái sokkal nagyobbak, mint a fényünk ω körfrekvenciája (például vörös fény szóródása olyan molekulákon, amelyeket gerjeszteni nem tud). Ekkor (8.46) nevezőjében csupán az első ω_0^4 számottevő, ezért

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4 \omega_0^4} \omega^4 \quad (8.48)$$

lesz. Ez a szórás folyamat a vörös színképtartományban fontos, hideg csillagok légkörében jól írja le a fotonok szóródását a molekulákon, de még az alapállapotban levő hidrogén atomokon is. (Ez a szórás folyamat felelős az intersztelláris vörösödésért, a Nap vörös színéért napnyugtakor és az égbolt kék színéért nappal.)

Oszcillátorunk valamennyit elnyel a beeső elektromágneses sugárzás teljes $0 \leq \omega \leq \infty$ spektrumából. Ezért (8.46) frekvenciára vett integráljával definiáljuk oszcillátorunk σ_{tot} teljes szórás hatáskeresztmetszetét, σ_{tot} az 5. fejezetben definiált κ_R , κ_{PI} analogja, kiszámításához bevezetjük $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ változót és figyelembe vesszük, hogy $\omega \approx \omega_0$ környezetében

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)\Delta\omega \approx 2\omega_0\Delta\omega, \quad (8.49)$$

és hogy (8.46)-at az imént megtárgyalt rezonancia jellege miatt elegendő csak a $\Delta\omega \ll \omega$ szűk frekvenciatartományban pontosan venni, az így elkövetett hiba jelentéktelen, a megtakarított fáradság az integrál kiszámításában azonban jelentős. Felhasználjuk még $\gamma = 2e^2\omega_0^2/3m_e c^3$ -t, továbbá azt, hogy (8.46) nevezője $\Delta\omega = 0$ környezetében változik jelentősen, ezért ω helyére mindenütt ω_0 -t írhatunk, így

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) &= \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4} \frac{\omega^4}{4\omega_0^2 \Delta\omega^2 + 4e^4 \omega_0^4 \omega^2 / (9m_e^2 c^6)} \\ &\approx \frac{4\pi\gamma e^2}{m_e c \omega_0^2} \frac{\omega_0^4}{4\omega_0^2 \Delta\omega^2 + \gamma^2 \omega_0^2} = \frac{\pi e^2}{m_e c} \frac{\gamma}{\Delta\omega^2 + (\gamma/2)^2}, \end{aligned} \quad (8.50)$$

(8.50)-t is nevezzük Lorentz-profilnak, miként az eredeti (8.46)-at. Végül integrálunk a frekvenciára, hogy megkapjuk a teljes szórás keresztmetszetet:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_0^\infty \sigma(\omega) d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} \int_0^\infty \frac{4d\nu}{\gamma[(2\Delta\omega/\gamma)^2 + 1]} = \frac{\pi e^2}{m_e c}. \quad (8.51)$$

((8.51) második felében bevezettük az $x = 2\Delta\omega/\gamma$ integrálási változót, $dx = 4\pi d\nu/\gamma$, ezzel $\int_{-\infty}^\infty dx/[\pi(1+x^2)] = 1$ lett, $-\omega_0 \leq \Delta\omega \leq \infty$ volt ugyan, de az előbb említett erős rezonancia jelleg miatt nem követtünk el hibát azzal, hogy $-\omega_0$ helyére $-\infty$ -t írtunk az integrál kiszámíthatósága végett.)

Mint ezt (8.1), (8.2) kapcsán már említettük, azért szükséges σ_{tot} bevezetése, hogy össze tudjuk kapcsolni az ω szerinti diszperziót nem tartalmazó B_{jm} -t az ω -tól függő $\sigma(\omega_{jm})$ -mel.

8.2.4. A plazmarezgés frekvenciája

Még egy bekezdés erejéig megemlítjük, hogy a sz-sz átmenetek két, asztrofizikában fontos fajtája a Thomson- és a Rayleigh-szórás. A csillag légkörét alkotó plazma neutrális. Ezért a Thomson-szórás, vagyis a szabad elektronokon való fotonszórás bizonyos fokig idealizáció, mert az elektronok gyakorlatilag a hozzájuk legközelebb eső ion terében mozognak, és ez a mozgás kollektív rezgéssé tud összeállni. Az

először elméletileg megjósolt, majd később laboratóriumban kísérletileg is létrehozott jelenség neve plazmarezgés. Az ebből fakadó korrekció kis energiákon jelentős is lehet, amikor a beeső fény körfrekvenciája az

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi N_e e^2}{m_e} \right)^{1/2} = 5.64 \times 10^4 N_e^{1/2} \quad (8.52)$$

plazmafrekvencia, a kollektív rezés frekvenciájának a közelébe esik. A csillaglégkörökre jellemző $N_e = 10^{10} - 10^{16} \text{cm}^{-3}$ érték behelyettesítésével azt kapjuk, hogy a távoli infravörösben esik nagyjából egybe a fény körfrekvenciája ω_p -vel.

8.2.5. Oszcillátorerősség

B_{jm} -t és σ_{tot} -t kell összekapcsolnunk, ez a következőképpen tehető meg: I_ν konstansnak tekinthető abban a szűk frekvenciatartományban, amelyben (8.46) nagy, feltesszük most is, hogy $I_\nu \sigma(\omega)$ izotrop is, ezért az n_j darab oszcillátorunk által elnyelt teljesítmény

$$4\pi n_j \int_0^\infty I_\nu \sigma(\omega) d\nu = 4\pi n_j I_\nu \sigma_{\text{tot}}, \quad (8.53)$$

míg ez a teljesítmény a fotonkibocsátások időegységenkénti száma \times a fotonok energiája, vagyis

$$B_{jm} (4\pi/c) I_\nu n_j h\nu_{jm} = 4\pi n_j I_\nu \sigma_{\text{tot}}. \quad (8.54)$$

Ebből következik a már (8.2) alatt megkapott összefüggés:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{B_{jm} h\nu_{jm}}{c} = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{jm}. \quad (8.55)$$

Az egyenlőség második felével definiáljuk az f_{jm} *oszcillátorerősséget*, ami szemléletesen azt mondja meg, hogy atomunk vagy ionunk $j \rightarrow m$ átmenete hány darab $\omega_0 = 2\pi\nu_{jm}$ (kör)frekvencián nyelő (sugárzó) klasszikus oszcillátornak felel meg, vagyis

$$f_{jm} = \frac{m_e h\nu_{jm}}{\pi e^2} B_{jm}. \quad (8.56)$$

A legerősebb vonalakra közelíti meg f_{jm} az egységnyi értéket.

Feltéve, hogy a valódi atom is Lorentz-profil szerint sugároz, az oszcillátorerősséggel szorozva (8.46)-at (illetve (8.50)-t) megkapjuk atomunk vagy ionunk atomszámra vonatkoztatott monokromatikus abszorpciós koefficiensét, ami fáradságos munkánk végcélja. Ha még a Boltzmann-statisztikát is figyelembe vesszük,

$$\kappa_\nu = n_j \sigma(\omega_{jm}) f_{jm} = g_j n_0 e^{-\frac{E_j}{kT}} f_{jm} \sigma(2\pi\nu_{jm}) / \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad (8.57)$$

lesz az n_0 számsűrűségű atomfajta monokromatikus abszorpciós koefficiense T hőmérsékleten az $j \rightarrow m$ átmenet következtében. Később még majd belátjuk, hogy a

színképvonalak kiszélesedését a sugárzó atomok és a környező plazma kölcsönhatása miatt a Lorentz-profil írja le akkor is, ha a sugárzó atomot a klasszikus oszcillátor helyett valami komolyabb modellel tárgyaljuk, ezért (8.50) és (8.57) nemcsak iskolapélda, hanem az asztrofizikai számításokban szükséges 1-2% pontosság elérésének fontos eszköze is. Látnivaló továbbá (8.57)-ből, hogy n_0 , g_j , f_{jm} , valamint E_j/kT azok a lényeges paraméterek, amelyekről függ, hogy egy kémiai elemnek számottevő-e a monokromatikus abszorpciós koefficiense egy adott frekvencián, vagyis lesz-e ott vonala egy színképben.

8.2.6. Átmeneti valószínűségek időtől függő perturbáció esetén

Utolsó feladatunk B_{jm} kiszámítása a kvantummechanika keretei között (a kvantumelektrodinamika kikerülésével): ebből fogjuk megkapni a (8.56) oszcillátor erősséget. A továbbiak kedvéért kicsit általánosabb problémával foglalkozunk: a sugárzó atomot kétféle időtől függő perturbáció éri.

- Az atomot elektromágneses sugárzás éri, amelynek frekvenciája $\nu \approx E/h$, ahol E az atomi szintek energiájának tartományába esik. Időfüggő energiaperturbáció éri tehát az atomtörzs Coulomb-potenciáljában mozgó elektront, a sugárzást azonban kvantálatlan, klasszikus elektromágneses mezőként kezeljük, céljainknak ez tökéletesen megfelel.
- A sugárzó atomtól, iontól viszonylag nagy távolságban perturbáló részecskék mozognak, amelyek szintén tekinthetők időtől függő perturbációnak.

Mindezekből következik, hogy az időfüggő perturbációk kvantummechanikai tárgyalására van szükségünk. P. A. M. Dirac (1902-1984) nyomán haladva foglalkozunk az alábbi problémával. Legyenek ismertek egy atom perturbálatlan H_0 Hamilton operátorának E_j energia sajátértékei és a hozzá tartozó ψ_j sajátfüggvényei:

$$H_0(\mathbf{r})\psi_j(\mathbf{r}) = E_j\psi_j(\mathbf{r}), \quad (8.58)$$

ahol \mathbf{r} az atom összes elektronjának helykoordinátáit jelenti, és H_0 természetesen ezek szerinti deriválásokat is tartalmaz. (A j index itt nemcsak a kötött állapotokat szimbolizálja, hanem a folytonos energiaspektrumba tartozókat is. Ha erre való szummázás szerepel a későbbiekben, azt úgy kell érteni, hogy a folytonos tartományban integrálni kell.) Legyen az időtől függő $H'(t)$ energiaperturbáció kicsi H_0 -hoz képest. Ekkor a

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (H_0 + H'(\mathbf{r}, t))\Psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (8.59)$$

időtől függő Schrödinger-egyenlet megoldható perturbációszámítással. Rendszerünk állapotának időbeli fejlődését az $e^{-iE_j t/\hbar}\psi_j$ perturbálatlan stacionárius sajátfüggvények (ortonormált teljes rendszer) által kifeszített Hilbert-tér időben változó

(állapot)vektorának fogjuk fel. Matematikailag ez azt jelenti, hogy (8.59) megoldását az alábbi formában keressük:

$$\Psi = \sum_j a_j(t) e^{-iE_j t/\hbar} \psi_j, \quad (8.60)$$

ezzel (8.59)

$$\sum_j \left[\frac{\hbar}{i} \dot{a}_j \psi_j - a_j E_j \psi_j + a_j (H_0 + H') \psi_j \right] e^{-iE_j t/\hbar} = 0 \quad (8.61)$$

lesz, amelyből (8.58) felhasználásával, $e^{iE_m t/\hbar} \psi_m^*$ -gal balról szorzással és \mathbf{r} -re integrálással ψ_j és ψ_m ortogonalitása miatt kapjuk, hogy

$$\dot{a}_m = -\frac{i}{\hbar} e^{iE_m t/\hbar} \sum_j a_j e^{-iE_j t/\hbar} \int \psi_m^* H' \psi_j d\mathbf{r} = -\frac{i}{\hbar} \sum_j a_j H'_{jm} e^{i\omega_{mj} t}, \quad (8.62)$$

ahol

$$\omega_{mj} = (E_m - E_j)/\hbar \quad (8.63)$$

és a H'_{jm} -t átmeneti mátrixelemnek nevezik. (8.62) még semmilyen elhanyagolást nem tartalmaz, matematikailag nézve lineáris elsőrendű csatolt differenciálegyenlet-rendszer. Megoldása csak numerikusan képzelhető el, végül

$$a_m^2(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left[\sum_j \int_{t_0}^t dt a_j(t) H'_{jm}(t) e^{i\omega_{mj} t} \right]^2 \quad (8.64)$$

adja meg t függvényében az m állapot valószínűségét a t_0 időpontban kezdődött H' perturbáció következtében. Az időegységenkénti átmenetek valószínűsége az m állapotba

$$w = \frac{1}{t - t_0} a_m^2(t) \quad (8.65)$$

lesz, ez nyilván egy átlag a $[t_0, t]$ intervallumra. A megoldásnak a

$$\int \Psi^* \Psi d\mathbf{r} = \sum_m a_m^2(t) = 1 \quad (8.66)$$

normálási feltételt kell kielégítenie.

(8.62) céljainkhoz megfelelő megoldására a következő iteráció teljesen kielégítő. Abból indulunk ki, hogy a H_0 -lal leírt atom vagy ion a H' perturbáció megjelenése előtt egy j sajátállapotában volt, vagyis a nulladik közelítés

$$a_{j'}^{(0)}(t) = \delta_{jj'}. \quad (8.67)$$

($\delta_{jj'} = 1$ ha $j = j'$, különben 0, ez a matematikából jól ismert Kronecker-szimbólum.) Ha $H'(t < t_0) = 0$, vagyis az átmenetet okozó perturbáció még nincs, akkor (8.62) szerint az összes $\dot{a}_m = 0$, ezzel (8.66) teljes összhangban van. (8.67) behelyettesítése után (8.62) szummája egy tagra redukálódik, integrálással adódik

$$a_m^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H'_{jm}(t') e^{i\omega_{jm}t'} dt', \quad (8.68)$$

ami tulajdonképpen az első közelítés (8.62) megoldásában, és mi meg is állunk itt. Megemlítjük még, hogy (8.68) burkoltan azt is tartalmazza, hogy a j állapot nem ürül ki, vagyis (8.67) igaz marad az időtől függetlenül, tehát a (8.66) normálási feltételt megsértjük. Ez mindaddig jó közelítés, amíg az atomoknak csak csekély hányada kerül az $m \neq j$ gerjesztett állapot(ok)ba.

A további közelítések kiszámítása már nem túl egyszerű: (8.68)-et érvényesnek kell tekinteni egy $t = t_1$ időpontig, s az így kapott $a_m^{(1)}(t)$, $t_0 < t < t_1$ koefficienseket kell helyettesíteni (8.62)-be, s most ezt kell integrálni, ezúttal már a $t_1 < t < t_2$ intervallumban. Ezek a magasabb közelítések azonban az átmeneti mátrixelem négyzetét (s újabb iterációs lépések után egyre magasabb hatványait) fogják tartalmazni, ezért akkor elhanyagolhatók, ha kicsi a perturbáció: $0 < |H'_{jm}| \ll |E_j|$. A magasabb közelítések akkor jutnak szerephez, ha például egy $j \rightarrow m$ átmenet első közelítésben tiltott, vagyis egy foton nem tudja létrehozni $H'_{jm} = 0$ miatt, de a $j \rightarrow m'$, majd a $m' \rightarrow m$ átmenetekhez tartozó $H'_{jm'}$, $H'_{m'm}$ átmeneti mátrixelemek nem nullák, ilyenkor a m' "közbulső állapot" keresztül zajlik le az átmenet, a folyamat két elektromágneses hullám = két foton elnyelésével illetve kibocsátásával megy végbe. A magasabb közelítések esetleges konvergenciája vagy divergenciája nem asztrofizikai kérdés, valamint az sem, hogy mikortól egyszerűbb (8.62) közvetlen numerikus megoldása szemben az iterációval.

8.2.7. Elektromágneses síkhullám mint az átmenetet indukáló perturbáció

A következő lépés, hogy H' konkrét formáját elektromágneses hullámra megadjuk. Hidrogénszerű ionra szorítkozva Hamilton-operátorunk

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H'(t) = \frac{1}{2m_e} \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + e\phi(\mathbf{r}) + e\Phi(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{p^2}{2m_e} + e\phi(\mathbf{r}) - \frac{e}{2m_e c} \left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \right] + \frac{e^2}{2m_e c^2} \mathbf{A}^2 + e\Phi(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{p^2}{2m_e} + e\phi(\mathbf{r}) - \frac{e}{m_e c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{ie\hbar}{2mc} \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{e^2}{2m_e c^2} \mathbf{A}^2 + e\Phi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (8.69)$$

ahol ϕ a Coulomb-potenciál, Φ és \mathbf{A} pedig az elektromágneses sugárzás skaláris és vektorpotenciálja. Ha N elektronos atomra vagy ionra csinálnánk az eljárást, (8.69)

alakú tagokat kellene összegeznünk, és $\phi(\mathbf{r})$ már az elektronok közti kölcsönhatást is tartalmazná. Felhasználtuk (8.69)-ben az impulzus

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla = -i\hbar \nabla \quad (8.70)$$

alakját, valamint azt, hogy

$$(\nabla \mathbf{A})\psi + (\mathbf{A} \nabla)\psi = \psi \operatorname{div} \mathbf{A} + 2(\mathbf{A}, \operatorname{grad} \psi). \quad (8.71)$$

Mértéktranszformáció (8.69) két tagjának kiküszöbölésére.. Legyen a perturbáció egy $\Phi'(\mathbf{r}, t)$ skalár és $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)$ vektorpotenciálú elektromágneses hullám. Hullámunkban a térerősségek

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad} \Phi' \quad (8.72)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}'. \quad (8.73)$$

Ha ezeket a vákuumra felírt (2.1-2.4) Maxwell-egyenletekbe helyettesítjük (tehát $\epsilon = \mu = 1, \bar{\sigma} = 0$), (2.2) és (2.4) azonosság lesz, mert $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0$ és $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ tetszőleges Φ, \mathbf{A} függvényekkel. Marad

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}' - \Delta \mathbf{A}' = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi'}{\partial t}, \quad (8.74)$$

és

$$\operatorname{div} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + \operatorname{grad} \Phi' \right] = 0. \quad (8.75)$$

Az átmeneti mátrixelem kiszámításához kedvező formát akkor kapunk, ha a $\chi(\mathbf{r}, t)$ mértékfüggvénnyel a következő mértéktranszformációt hajtjuk végre:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \operatorname{grad} \chi \quad (8.76)$$

és

$$\Phi = \Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (8.77)$$

a transzformáció a térerősség értékét nem változtatta meg, amint arról könnyen meggyőződhetünk (8.76,8.77) (8.72,8.73)-ba helyettesítésével. A (8.74,8.75)-be helyettesítéssel pedig kapjuk, hogy

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \left[\Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right] \quad (8.78)$$

és

$$\operatorname{div} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \Phi \right] = 0. \quad (8.79)$$

A mértékfüggvényt a

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \left[\operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right] \quad (8.80)$$

egyenlet megoldásából nyerhetjük. Ennek egy megoldása

$$\Delta\chi + \operatorname{div} \mathbf{A}' = 0 \quad (8.81)$$

és

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] = 0. \quad (8.82)$$

Vesszük (8.76) divergenciáját, ebből (8.81) alapján kapjuk, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (8.83)$$

míg (8.82)-t egyszer integrálva, és az integrációs állandót nullának választva kapjuk (ref8.5.7)-ből, hogy

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (8.84)$$

A perturbációszámítást tehát a.

$$H'(\mathbf{r}, t) = \frac{ie\hbar}{m_e c} (\mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \operatorname{grad}) + \frac{e^2}{2m_e c^2} \mathbf{A}^2 \quad (8.85)$$

Hamilton-operátorral kell végigcsinálni, amelyben a második tag ráadásul sokkal kisebb, mint az első, a mi feladatainkban el is hanyagolható.¹ A mértéktranszformációt azért csináltuk, mert így két tag nulla lett (8.69)-ben, továbbá \mathbf{A} -val számolva az elektromágneses hullám \mathbf{E} és \mathbf{H} komponensét ily módon automatikusan figyelembe vesszük.

Vákuumbeli elektromágneses hullámunk egyébként kielégíti a Lorentz-feltételt:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (8.86)$$

és \mathbf{A} -ra az alábbi hullámeqyelet vonatkozik:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (8.87)$$

A legegyszerűbb eset az, amikor a perturbáció egy $\mathbf{x} \parallel \mathbf{k}$ irányban terjedő lineárisan poláros elektromágneses síkhullám. Ez a választás nem jelent különösebb megszorítást, mivel az atom helyén lévő perturbáló elektromágneses mező síkhullámok

¹Ha időtől független, tehát \mathbf{A} vektorpotenciálú állandó mágneses mezőbe helyezzük atomunkat, éppen (8.85) első tagja a lineáris, a második pedig a kvadratikusan Zeeman-effektust írja le. Ha \mathbf{H} térerősségű sztatikus homogén mágneses mező a perturbáció $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{H}$ lesz.

szuperpozíciójaként felfogható. A hullámban \mathbf{A} merőleges \mathbf{k} -ra, így (8.83) automatikusan teljesül, a hullámgyenlet megoldása

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 2\mathbf{A}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \alpha) = \mathbf{A}_0 (e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \alpha)} + e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \alpha)}), \quad (8.88)$$

ahol α egy fáziseltolódás. Visszahelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}. \quad (8.89)$$

A térerősségek zérustól különböző komponensei (8.72,8.73,8.89) szerint

$$\mathbf{E} = -2\mathbf{A}_0 |\mathbf{k}| \sin(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t) \quad (8.90)$$

és

$$\mathbf{H} = -2\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 \sin(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t), \quad (8.91)$$

a Poynting-vektor \mathbf{x} irányba mutat, $\mathbf{x} = 0$ mentén (tehát atomunk helyén) az egy rezgési periódusra átlagolt abszolút értékéből pedig (2.12) és (2.24) szerint kapjuk (8.90,8.91)-ből az intenzitást

$$I_\nu = \frac{c}{4\pi} 4A_0^2 k^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \frac{A_0^2 \omega^3}{2\pi^2 c} \frac{1}{2} t \Big|_0^{2\pi/\omega} = \frac{\omega^2 A_0^2}{2\pi c}, \quad (8.92)$$

ahol burkoltan feltételeztük, hogy a most már izotropnak feltételezett I_ν intenzitást összetevő egyes hullámok között nincs fáziseltolódás, vagyis (8.90,8.91) argumentumában az α fázis minden egyes hullámra (fotonra) azonos, ezért volt nullának vehető (8.92)-ben.

8.2.8. Az oszcillátorerősség és az átmeneti mátrixelem

Behelyettesítjük (8.85) első tagját (8.68)-be, és mivel $a_m(t)$ négyzetétől függ a bennünket érdeklő átmeneti valószínűség, nyugodtan használhatjuk a perturbáló elektromágneses hullámra a (8.88) komplex alakot, ami a számításokat meg fogja könnyíteni. A $[t_0 = 0, t]$ intervallumra integrálva kapjuk, hogy

$$a_m^{(1)}(t) = -\frac{H''_{jm}}{\hbar} \frac{e^{i(\omega_{mj} + \omega)t} - 1}{\omega_{mj} + \omega} - \frac{H'_{jm}}{\hbar} \frac{e^{i(\omega_{mj} - \omega)t} - 1}{\omega_{mj} - \omega}, \quad (8.93)$$

ahol

$$H''_{jm} = \frac{ie\hbar}{mc} \int d\mathbf{r} \psi_m^* e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (\mathbf{A}_0, \text{grad}\psi_j), \quad (8.94)$$

$$H'_{jm} = \frac{ie\hbar}{mc} \int d\mathbf{r} \psi_m^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} (\mathbf{A}_0, \text{grad}\psi_j). \quad (8.95)$$

(8.93) nyilván csak $E_m \approx E_j \pm \hbar\omega$ esetén lesz nagy, a + előjel az abszorpciónak felel meg, a - pedig a indukált emisszióknak, ha az egyik nagy, a másik elhanyagolható. N

elektront tartalmazó atom esetén értelemszerűen mind az N elektron koordinátája szerinti gradiens összege áll a formuláinkban.

Az egyszerűség kedvéért vegyük most az abszorpciót, amikor (8.93)-ból csak a második tag számottevő. Atomunk m gerjesztett állapotban való megtalálásának valószínűségét a t időpontban (8.93) második tagjának négyzete adja:

$$a_m^{(1)2}(t) = \frac{2H'_{jm}{}^2}{\hbar^2} \frac{1 - \cos(\omega_{jm} - \omega)t}{(\omega_{jm} - \omega)^2} = \frac{4H'_{jm}{}^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2(\omega_{mj} - \omega)t/2}{(\omega_{mj} - \omega)^2} \quad (8.96)$$

lesz. $((e^{ix} - 1)^2 = (\cos x - 1 + i\sin x)(\cos x - 1 - i\sin x) = 2(1 - \cos x) = 4\sin^2 x/2$ miatt.) Mivel atomunkat (8.96) szerint tetszőleges ω frekvenciájú fény viheti m állapotba, de (8.96) jobb oldala csak az $\omega \approx \omega_{mj}$ rezonancia körül számottevő, H'_{jm} -t konstansnak vesszük ebben a szűk intervallumban és integráljuk $a_m^{(1)2}(t)$ -t ν szerint, hogy σ_{tot} analógiát megkapjuk.

$$\int_0^\infty a_m^{(1)2}(t) d\nu = \frac{4H'_{jm}{}^2}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega_{jm} - \omega)t/2]}{(\omega_{jm} - \omega)^2} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{H'_{jm}{}^2}{\hbar^2} t. \quad (8.97)$$

(Bevezettük az $x = \omega_{mj} - \omega$, $-\infty \leq x \leq \omega_{mj}$ integrálási változót, nem követtünk el azzal nagy hibát, hogy az x szerinti integrálásban ω_{mj} helyett ∞ -tól integráltunk, mert így felhasználhattuk, hogy

$$\int_{-\infty}^\infty x^{-2} \sin^2 ax dx = 2 \int_0^\infty x^{-2} \sin^2 ax dx = |a|\pi. \quad (8.98)$$

(8.67) következménye (8.97)-ben a t , mert aszerint nem ürül ki a kezdeti j állapot, a perturbáció pedig minden ω frekvencián egyenletesen, az időben szakadatlanul működik $t_0 = 0$ óta, és az indukált emissziót pedig kizártuk most azzal, hogy csak az abszorpcióra szorítkoztunk. Számunkra azonban az időegységenkénti abszorpciós átmenetek száma fontos csupán, ez pedig a formalizmusunkban (8.65) analógiájára

$$w = \frac{1}{t} \int_0^\infty a_m^{(1)2}(t) d\nu \quad (8.99)$$

lesz, ami már véges. A $H'(t)$ perturbáció miatt az n_j darab atomunk által elnyelt sugárzási teljesítmény kifejezhető B_{jm} -mel, és megkapható (8.99) alapján is:

$$B_{jm} u_{\nu_{mj}} n_j h \nu_{mj} = \frac{H'_{jm}{}^2}{\hbar^2} n_j h \nu_{mj}, \quad (8.100)$$

amit (8.56)-ben felhasználva megkapjuk az oszcillátor erősséget az átmeneti mátrixelemmel kifejezve:

$$\begin{aligned} f_{jm} &= \frac{m_e h \nu_{mj}}{\pi e^2} \frac{H'_{mj}{}^2}{\hbar^2 u_{\nu_{mj}}} = \frac{4\pi m_e \nu_{mj} H'_{mj}{}^2}{h e^2 u_{\nu_{mj}}} \\ &= \frac{m_e c^2}{e^2 h \omega_{mj} A_0^2} \left[\int d\mathbf{r} \psi_m^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} (\mathbf{A}_0, \text{grad} \psi_j) \right]^2. \end{aligned} \quad (8.101)$$

A nevezőben előforduló $u_{\nu_{m_j}}$ elektromágneses energiasűrűség úgy tűnt el, hogy $u_{\nu} = 4\pi I_{\nu_{m_j}}/c = \omega_{m_j}^2 A_0^2/2\pi c^2$ -t behelyettesítettük (8.92)-ből. Legyen θ az atomhoz rögzített koordináta-rendszerben kiszámított $\text{grad}\psi_j$ és az \mathbf{A}_0 vektor közötti szög, erre a szögre átlagolnunk kell, mert az atomok egyforma valószínűséggel állnak bármelyik θ irányba \mathbf{A}_0 -hoz képest.

$$\int_{\Omega} \cos^2\theta d\Omega/4\pi = \frac{1}{3} \quad (8.102)$$

miatt (8.57) $\kappa_{\nu} = n_j\sigma(\omega_{j_m})f_{j_m}/3$ végleges kifejezésébe f_{j_m} 1/3 súllyal jött.

Vegyük még egy kicsit szemügyre a hullámot, mivel

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0(1 - i\mathbf{k}\mathbf{x} - (\mathbf{k}\mathbf{x})^2/2 + \dots), \quad (8.103)$$

a sorfejtés első tagja A_0 nagyságú, \mathbf{x} -re merőleges homogén mező, a második pedig \mathbf{x} mentén $A_0 kx$ értéket felvevő mező, amely már nem homogén. Az inhomogenitás azonban csekély, mert $|\mathbf{k}|^{-1}$ sokkal nagyobb, mint az atomunk mérete: (8.90) szerint

$$k^{-1} = c/\omega \approx 8 \times 10^{-3} \text{cm} \gg a_0, \quad (8.104)$$

ahol $a_0 = \hbar^2/Zme^2 = 5,29 \times 10^{-9} \text{cm}$ az első Bohr sugár, (8.88)-be 500nm-es fény körfrekvenciáját helyettesítettük, látnivaló, hogy $|\mathbf{k}\mathbf{x}| \approx 6,9 \times 10^{-5}$ nagyságrendje 10^{-4} marad még akkor is, ha figyelembe vesszük azt, hogy ψ_m és ψ_j közül a kisebbik, amelyik megszabja az integrál értékét H'_{j_m} -ben, néhány a_0 értékig terjed ki. Emiatt az exponenciális sorfejtéséből elég az első tagra szorítkozni. Például Rydberg atomoknál lehetnek a további tagok számottevőek, de ilyenek a csillagok légkörében nem fordulnak elő.

A (8.101)-ben előforduló integrál akár közvetlenül is kiszámítható, de érdemes megadni egy alternatív formáját a gradiensoperátorok eltüntetésével. A

$$H_0 = \sum_{\iota} \frac{p_{\iota}^2}{2m_e} + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (8.105)$$

Hamilton-operátor és az $\mathbf{r} = \sum_{\iota} \mathbf{r}_{\iota}$ operátor felcserélési relációja az ι, μ indexű részecskék

$$[x_{\iota}, p_{x,\mu}] = i\hbar\delta_{\iota\mu}, [y_{\iota}, p_{y,\mu}] = i\hbar\delta_{\iota\mu}, [z_{\iota}, p_{z,\mu}] = i\hbar\delta_{\iota\mu} \quad (8.106)$$

stb. felcserélési relációiból levezethető:

$$[\mathbf{r}, H_0] = \frac{i\hbar}{m_e} \sum_{\iota} \mathbf{p}_{\iota} = i\hbar \sum_{\iota} \text{grad}_{\iota}, \quad (8.107)$$

mert $\mathbf{p} = m_e \mathbf{v}$. Ezzel és H_0 hermitikus voltát kihasználva, továbbá az exponenciális (8.103) sorfejtésének első tagjára szorítkozva

$$\begin{aligned} H'_{j_m}(\text{dipól}) &= \int d\mathbf{r} \psi_m^* [\mathbf{r}H_0 - H_0\mathbf{r}] \psi_j = \frac{1}{i\hbar} \left[\int d\mathbf{r} \psi_m^* \mathbf{r}H_0 \psi_j - \int d\mathbf{r} H_0 \psi_m^* \mathbf{r} \psi_j \right] \\ &= \frac{(E_j - E_m)}{i\hbar} \int d\mathbf{r} \psi_m^* \mathbf{r} \psi_j = \frac{i\omega_{m_j} \mathbf{d}_{mj}}{e}, \end{aligned} \quad (8.108)$$

ahol $\mathbf{d}_{jm} = d_{jm}^{(x)}\hat{\mathbf{i}} + d_{jm}^{(y)}\hat{\mathbf{j}} + d_{jm}^{(z)}\hat{\mathbf{k}}$ a dipól átmeneti mátrixelem, mivel $\mathbf{d} = \sum_i^N e\mathbf{r}_i$ éppen a dipólmomentum operátora. (Meg kell azonban jegyezni, hogy az integrál (8.101) és (8.108) formája csak egzakt ψ -vel ekvivalens. Ha csak közelítő hullámfüggvényünk van, igen jelentős, akár nagyságrendi eltérés is lehet a gradienses és a dipólmomentumos érték között. Mivel csillagok színképében nem ritkák az olyan vonalak, amelyekre az oszcillátor erősséget laboratóriumból nem ismerjük, tehát ki kell számítanunk, nem ritkán okoz gondot az, hogy melyik formulának is higgyünk (8.101) és (8.108) közül.)

Jegyzetünk kereteit meghaladó mennyiségű számítással ki lehet mutatni, hogy (8.103)-ból $i\mathbf{k}\mathbf{x}$ figyelembevételéből származó tag atomunk elektromos kvadrupólmomentumával függ össze, s a sor folytatható, az elektromos oktopólmomentum stb. következnek a továbbiakban. Az átmenetek elnevezése: elektromos dipól, kvadrupól, oktopól stb. átmenet. Ha

$$\mathbf{d}_{mj} = 0, \quad (8.109)$$

akkor tiltott átmenetről beszélünk, ez a vektoriális formában felírt egyenlőség természetesen úgy értendő, hogy \mathbf{d}_{jm} mindhárom komponense 0. Ha mégis lehetséges a $j \rightarrow m$ átmenet, annak oka az, hogy valamelyik magasabbrendű átmeneti mátrixelem különbözik nullától. Mivel a kvadrupól átmeneti valószínűség $(kx)^2$ -tel arányos, az ilyen átmenetek valószínűsége 8–9 nagyságrenddel kisebb, mint a dipól átmenetké. Fotoszferikus színképben emiatt nem is látunk tiltott vonalakat, mert a fotoszféra sűrűségén az optikai átmenet létrejötte előtt ütközések kiürítik azokat az energiaszinteket, amelyek közötti átmenetekből származhatnának a tiltott vonalak. A korona ritka plazmájában vagy csillagközi gázban aztán már elég ideig (legalább 1–2 s-ig) maradhat az atom zavartalanul, ezért az ottani körülmények között már létrejöhetnek a tiltott vonalak, erősségük azonban jóval elmarad a megengedett vonalaké mögött. Megemlítjük még, hogy a hélium szinglet és triplet sorozata között minden rendben nulla (8.101), ezért ezek között optikai átmenet nincs.

Fotoszferikus színképekben általában csak megengedett vonalakkal szokott lenni dolgunk, kromoszférákból, koronákból, csillagközi gázfelhőkből azonban gyakran jönnek tiltott vonalak is. A hidrogén 21 cm-es sugárzása pedig hiperfinom mágneses dipólátmenetből származik, ami csak relativisztikus közelítésben tárgyalható a Breit-egyenlet felhasználásával.

Most már a (8.57) monokromatikus abszorpciós koefficiens minden egyes összetevője megvan.

Végezetül egy megjegyzés: a folytonos spektrumba eső állapotok sajátfüggvénye nem normálható, az itteni levezetés formálisan nem érvényes rájuk. A legegyszerűbben úgy kerülhető ki a probléma, hogy választunk egy az atomi méretekhez képest igen nagy térfogatot, akkorát, hogy ebben már kvázi-folytonos lesz az $E > 0$ állapotok energiaspektruma, s ebbe normáljuk ψ -t.

Mint említettük, az átmeneti mátrixelem hidrogénszerű színképre zárt formában

kiszámítható,

$$\mathbf{d}_{jm} = \int_0^\infty r_1^2 dr_1 \int_0^\pi d\theta_1 \sin\theta_1 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \psi_m(r_1, \theta_1, \phi_1) \mathbf{r}_1 \psi_j(r_1, \theta_1, \phi_1), \quad (8.110)$$

ahol ψ a hidrogénatom egyre normált sajátfüggvénye,

$$\mathbf{r}_1 = r_1 (\sin\theta_1 \cos\phi_1 \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta_1 \sin\phi_1 \hat{\mathbf{j}} + \cos\theta_1 \hat{\mathbf{k}}). \quad (8.111)$$

A szögek szerinti integrálok zárt alakban kiszámíthatók, a kiválasztási szabályokat kapjuk meg belőlük: $\Delta n_3 = 0, \pm 1$, $\Delta l = \pm 1$, Δn tetszőleges, n, l, n_3 a fő, a mellék és a mágneses kvantumszám, számításainkban ezek egy hármását szimbolizálja j és m . A radiális integrál kiszámítása kicsit hosszadalmas, de különösebb nehézség itt már nincs: zárt alakba írható formulák vannak a Lyman-, Balmer-, stb. sorozatok tagjaira. Ezek közös aszimptotikus sajátossága, hogy $f_{jm} \propto n^{-3}$ $n \gg 1$ esetén.

Héliumszerű atomok ($N = 2$) néhány \mathbf{d}_{jm} -je szintén jól számítható, noha ezekre már nincs zárt formula. $N \geq 2$ esetén bizonyos vonalak átmeneti mátrixeleme laboratóriumi mérésből meghatározható, de az asztrofizikában fontos vonalaknak csak egy töredékére. Az itteni körön kívül eső vonalak átmeneti mátrixelemeinek meghatározására két út kínálkozik: olyan csillagok színekéből kihámozható, amelyek fotoszférájának szerkezetét jól ismerjük, vagypedig vannak a különböző atomfizikai közelítések, amelyek lényege, hogy az atomtörzset potenciális energiával modellezzük a valenciaelektron számára, s ily módon már csak egyelektron problémát kell megoldanunk. Mivel ez utóbbi megközelítés az asztrofizikában igen fontos, és nemritkán az egyetlen forrás az átmeneti mátrixelemek számítására, felvázoljuk a főbb megközelítési módokat.

- Lehet az atomtörzset Hartree–Fok-közelítéssel tárgyalni: N egyelektron hullámfüggvény antiszimmetrizált szorzatából indulunk ki és addig módosítjuk ezeket (iterálunk), amíg az m, j állapotok (valahonnan ismert) energiasajátértékét jól nem adja.
- A Thomas–Fermi-modellben az atomtörzset zérus hőmérsékletű elfajult elektromágnesnek tekintjük, ebben a potenciálban mozog a valenciaelektron.
- Lehet nem túl bonyolult konfigurációk (2–3 valenciaelektront tartalmazó atomok, ionok) hullámfüggvényét variációs számítással is meghatározni.

Mindezen módszerek közös problémája, hogy az eredményül kapott ψ_j hullámfüggvény jól adhatja például egy számunkra fontos állapot kísérletileg megmért vagy csillagszínekéből meghatározott E_j energiáját (10^{-4} de akár 10^{-12} pontosan is), vagyis

$$E_j \approx \frac{(\psi_j H_0 \psi_j)}{(\psi_j, \psi_j)}, \quad (8.112)$$

(s ugyanez áll m -re is,) de ez semmiféle biztosítékot nem jelent arra, hogy \mathbf{d}_{jm} értéke is jó lesz, mert az energiasajátérték jó meghatározására irányuló eljárásaink ψ -t csak ott adják pontosan, ahol H_0 nagy súlyt ad ψ -nek (8.112) számlálójában, ez pedig inkább a $0 \leq r \leq 1$ tartomány a $H_0(\mathbf{r})$ -ben lévő Coulomb szingularitás miatt. Ez a hullámfüggvény lehet egészen rossz az $r \gg 1$ régióban, amelyben (8.112) ad nagy súlyt a hullámfüggvénynek. Ezért van az a furcsaság, hogy nemritkán egy n_j^* nem egész effektív kvantumszámhoz tartozó $r = 0$ -ban egyébként szinguláris hidrogénszerű egyelektron hullámfüggvény jobb átmeneti mátrixelemet szállít, mint az itt említett raffinált eljárások, ha az effektív kvantumszámot a Balmer-képlettel definiáljuk:

$$E_j = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n_j^{*2}}, \quad (8.113)$$

ahol E_j ismét a színeképvonal helyéből ismert kötési energia.

Ha tisztán atomfizikai szempontból nézzük, a k-k és a k-sz, sz-sz átmentek között nincs lényeges különbség, a 8.2.6-8.2.8 szakaszokban leírtak átvihetők minden különösebb nehézség nélkül olyan állapotok közötti átmenetekre is, amelyekben a végállapot vagy a kezdő- és a végállapot egyaránt a kontinuumban található. Két problémát kell csak kikerülni, ami az ottani megfontolásokat módosítja: figyelembe kell venni, hogy a folytonos színeképben az E_m , de esetleg az E_j sajátértékek is tetszőleges értéket vehetnek föl, és hogy a kontinuumba tartozó sajátfüggvények normája nem véges. A sajátértékek folytonos eloszlása miatt a 8.4. szakaszban a szummázások helyére integrálások lépnek, térben végtelen norma kikerülése azonban nem ilyen egyszerű.

Ezeket a gondokat, meg a nemrelativisztikus kvantummechanika néhány más gondját is meg lehet oldani azzal, hogy a szabad elektron hullámfüggvényét egy hatalmas, de mégis véges térrészbe normáljuk, amelyet egy végtelen magas potenciálfallal jelölünk ki. (L. I. Schiff, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, 1968). Mivel nem asztrofizikai kérdés, e megoldási mód következményeit nem tárgyaljuk, csupán annyit jegyzünk meg, hogy ily módon azokat az erősen kötött állapotokat kapjuk meg, amelyeknek hullámfüggvénye sokkal kisebb kiterjedésű, mint a véges térrész, a diszkrét szabad állapotok pedig bizonyos sűrűséggel helyezkednek el az E -tengelyen. Az $E \approx 0$ tartományba eső kötött és szabad állapotokat pedig nem kapjuk meg. Nyilvánvaló, hogy minél nagyobb a véges térrész, annál közelebb járnak az eredmények a teljesértékű megoldáshoz, a valódi kontinuummal kapott-hoz.

9. fejezet

A SZÍNKÉPVONALAK KISZÉLESEDÉSE

Az előző fejezetben láttuk, hogy oszcillátorunk nemcsak a meghatározott $\omega_0 = \omega_{mj}$ frekvencián, hanem annak a (8.46) által megadott környezetében is sugárzott. A kvantummechanikai számítással kapott (8.96) (egy bizonyos $t \gg \omega^{-1}$ időintervallumra átlagolva) felfogható úgy is mint egy vonalprofil, vagyis a diszkrét, stacionárius E_j, E_m energiaszintekkel rendelkező atom, ion nemcsak a $\nu = (E_m - E_j)/h$ frekvencián, hanem annak környezetében is sugároz. A sugárzás maximuma az oszcillátor, illetve az atom sajátfrekvenciájánál van, s igen gyorsan lecseng annak egy szűk környezetében. A keletkező színeképvonalnak tehát nem éles, hanem mindig valamilyen kiszélesedett profilja lesz a frekvencia szerint.

9.1. A színeképvonalak profilja

A színeképvonalak kiszélesedése alatt azt értjük, hogy egy optikailag vékony plazmán belül atomjaink (ionjaink) által kibocsátott fény (az atomfajta-hoz tartozó monokromatikus emissziós koefficiens, ϵ_ν) Fourier-spektruma valamilyen folytonos eloszlás lesz az ω_{mj} sajátfrekvenciák környékén, nem pedig vonal. Ezzel egyenértékű megfogalmazás, hogy a színeképvonal helyén a monokromatikus abszorpciós koefficiens valamilyen folytonos eloszlás lesz. (Gondoljunk itt vissza a Kirchhoff-törvényre, s az annak alapján definiált forrásfüggvényre: $\epsilon_\nu = \kappa_\nu S_\nu$ — (4.4), S_ν a vonal profilján belül többnyire állandónak tekinthető a fotoszferikus vonalakban, ilyenkor elég csupán κ_ν frekvenciától való függésével foglalkozni.) A második megfogalmazás mellett maradunk a kvantitatív tárgyalásban, a (8.57) monokromatikus abszorpciós koefficiensben vesszük $\sigma_{\text{tot}} = \pi e^2/mc$ -t és ezután beszorzunk egy egyre normált

$P(\omega)$ profillal:

$$\kappa_\nu = n_j \kappa_{\nu,at} = n_j f_{jm} \frac{\pi e^2}{mc} P(\omega), \quad (9.1)$$

ahol

$$\int_0^\infty P(\omega) d\nu = 1. \quad (9.2)$$

Például $P(\omega)$ lehet a (8.46,8.50)-ban megismert Lorentz-profil. Ha megvan a vonalprofil optikailag vékony esetre, akkor még figyelembe kell vennünk azt is, hogy a csillag felületén a fluxus $F_\nu(0)$ egy (4.20) alakú integrálból jön, és $P(\omega)$ változik (4.20) τ_ν integrálási változójának függvényében.

A színeképvonalak kiszélesedésének oka részben a sugárzó atomban magában van, részben sugárzó atomnak a környezetével való kölcsönhatásában, részben pedig az atomok hőmozgása felelős. Ennek megfelelően a jelenség fizikailag tárgyalása során három jól elkülönülő csoportba oszthatók a színeképvonal kiszélesedését okozó hatások: beszélünk

- természetes,
- nyomási és
- Doppler-vonalkiszélesedésről.

Ha az imént felsoroltak által létrehozott folytonos eloszlás maximuma nem egyezik meg az ω_{mj} frekvenciával, akkor nemcsak vonalkiszélesedésről beszélünk, hanem vonaleltolódásról is. Egy színeképvonal hullámhosszának eltolódását lehet úgy is felfogni, hogy valójában aszimmetrikus vonalkiszélesedésről van szó: tehát $P(\omega_{mj} + \Delta\omega) \neq P(\omega_{mj} - \Delta\omega)$. Rövidesen belátjuk, hogy optikailag vékony esetben magyarázatul csak a nyomási vonalkiszélesedés jön szóba.

A színeképvonalak kiszélesedése és a hullámhosszuk esetleges eltolódása a plazmaspektroszkópia tárgykörébe tartozik, és számos laboratóriumban folynak e témakörben intenzív kísérleti és elméleti munkák, amelyeknek célja a plazma diagnosztikája, vagyis a plazmában uralkodó viszonyok (hőmérséklet, nyomás, elektronkoncentráció) megállapítása. Atomfizikai szinten a laboratóriumi és az asztrofizikai plazmaspektroszkópia között nincs elvi különbség, a laboratóriumi plazmákból és a csillagokból származó színeképek különbözőségéért főleg az felel, hogy laboratóriumban kisülésekből vagy rádiófrekvenciás plazmából, nem ritkán optikailag vékony plazmából, a csillagokban pedig nagy kiterjedésű, forró, optikailag vastag termikus plazmából származik a színekép.

A színeképvonalak kiszélesedéséről és eltolódásáról csak az alapfogalmakat és a fizikai lényegét ismertetjük, mert a témakör valamelyest is teljes tárgyalása nem képzelhető el jegyzetünk egyetlen fejezetében.

9.1.1. Véges hosszúságú rezgések spektruma

Egy $f(t)$ időfüggésű rezgés esetén az amplitúdó frekvencia szerinti eloszlását az

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \quad (9.3)$$

Fourier-integrál adja meg. Vegyünk egy klasszikus oszcillátort ω_0 sajátfrekvenciával, amely a $[-t/2, t/2]$ időintervallumban sugároz ($t \gg \omega_0^{-1}$), ezen kívül pedig nem sugároz. Az intenzitás eloszlása a körfrekvencia függvényében az amplitúdó négyzetével lesz arányos, amint ezt már (2.25) kapcsán láttuk, vagyis

$$\epsilon_\omega(t_0) \propto \left[\int_{-t/2}^{t/2} e^{i(\omega - \omega_0)t'} dt' \right]^2 = \left[\frac{e^{i(\omega - \omega_0)t'}}{i(\omega - \omega_0)} \Big|_{-t/2}^{t/2} \right]^2 = \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)t/2]}{[(\omega - \omega_0)/2]^2}, \quad (9.4)$$

ami az m állapotban való (8.96) $a_m^{(1)2}(t)$ megtalálási valószínűséggel mutat szoros rokonságot. Ez a hasonlóság is mutatja, hogy nem járunk messze a valóságtól, ha egy atom (ion) sugárzását úgy képzeljük el, mint egy bizonyos időintervallumban zavartalanul sugárzó harmonikus oszcillátort. Ez az intervallum például egy gerjesztett állapot véges élettartama, amint azt a természetes vonalkiszéledésnél látni fogjuk, vagy perturbáló részecskékkel való két ütközés közötti idő, amint azt a nyomási vonalkiszéledésnél fogjuk látni.

Meg kell tehát becsülnünk annak a $W(t)$ valószínűségét, hogy egy kiszemelt atom t ideig nem ütközik. Ezzel a függvénnyel t -re átlagolva (9.4)-t megkapjuk a $P(\omega)$ vonalprofil, ami (9.1) frekvenciától függő része.

Ha a plazmánkban t_0 (sugárzó) atomunk két ütközése közötti átlagos időtartam, atomunk $\Delta t \gg t_0$ idő elteltével nyilván $\Delta t/t_0$ egész része számú ütközést fog elszervezni. Ha most megfontolásunkat kiterjesztjük plazmánk $N(t)$ darab olyan elemére (atomjára vagy ionjára), amelyek eddig még nem ütköztek, Δt idő alatt $N\Delta t/t_0$ számú újabb ütközés várható. A $t + \Delta t$ időpontban a még nem ütközött atomok száma

$$N(t + \Delta t) = N(t) - N \frac{\Delta t}{t_0} \quad (9.5)$$

lesz. Taylor-sorba fejtjük a bal oldalt,

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \frac{dN}{dt} \Delta t + \dots, \quad (9.6)$$

amiből

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{t_0}, \quad (9.7)$$

amely egyenlet könnyen integrálható, az eredmény

$$N(t) = N(0) e^{-t/t_0}. \quad (9.8)$$

A keresett valószínűség

$$W(t) = \frac{N(t)}{N(0)} = e^{-t/t_0}. \quad (9.9)$$

A vonalprofil

$$\begin{aligned} \epsilon_\omega &\propto \int_0^\infty \sin^2[(\omega - \omega_0)t/2] e^{-\frac{t}{t_0}} dt \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{e^{i(\omega - \omega_0)t/2} - e^{-i(\omega - \omega_0)t/2}}{i} \right]^2 e^{-\frac{t}{t_0}} dt \\ &= -2t_0 e^{-\frac{t}{t_0}} \Big|_0^\infty - \frac{e^{[i(\omega - \omega_0) - \frac{1}{t_0}]t}}{i(\omega - \omega_0) - \frac{1}{t_0}} \Big|_0^\infty + \frac{e^{-[i(\omega - \omega_0) + \frac{1}{t_0}]t}}{i(\omega - \omega_0) + \frac{1}{t_0}} \Big|_0^\infty \\ &\approx \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{t_0^2}}, \end{aligned} \quad (9.10)$$

ami viszont egy konstans faktortól eltekintve a (8.50) alatt megismert Lorentz-profil $\gamma/2 = t_0^{-1}$ -gyel, mert az utolsó előtt sorban az első tag $-2t_0$ értéke elhanyagolható a második és a harmadik tag összegéhez képest.

Mint azt (8.51) kapcsán láttuk, a normálás $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $-\omega_0 \leq \omega \leq \infty$ és $x = \Delta\omega t_0$, $dx = 2\pi t_0 d\nu$ bevezetésével

$$\int_0^\infty \frac{d\nu}{(\omega - \omega_0)^2 + t_0^{-2}} = \frac{1}{2\pi t_0} \int_{-\omega_0}^\infty \frac{dx}{\Delta\omega^2 + t_0^{-2}} \approx \int_{-\infty}^\infty \frac{t_0 dx}{1 + x^2} = \frac{t_0}{2}, \quad (9.11)$$

tehát

$$P(\omega) = \frac{2}{t_0} \frac{1}{\Delta\omega^2 + t_0^{-2}} = \frac{\gamma}{\Delta\omega^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (9.12)$$

$P(\omega)$ maximuma nyilván $\Delta\omega = 0$ -nál van, $P(\omega_0) = 4/\gamma$, félértéke pedig

$$\frac{2}{\gamma} = \frac{\gamma}{\Delta\omega^2 + \gamma^2/4} \quad (9.13)$$

megoldásából

$$\Delta\omega = \pm \frac{1}{t_0}. \quad (9.14)$$

Ha $t_0 \rightarrow \infty$, a Lorentz-profil $\Delta\omega$ félszélessége úgy tart nullához, hogy a (9.2) normálás teljesül, vagyis $P(\omega)$ egy vonallá fajul el. Éles, matematikai értelemben vett vonalat tehát csak akkor kapnánk, ha atomjaink végtelen hosszú ideig zavartalanul sugározhatnának. Ez azonban lehetetlen, mivel (8.10)-(8.12) kapcsán beláttuk, hogy a gerjesztett állapotok élettartama véges, ezért ha a sugárzó atomok kölcsönhatása elhanyagolható is a környezetükkel, a kisugárzott vonal profilja akkor is egy véges félszélességű $P(\omega)$ lesz.

Ha $\Delta\omega \gg t_0^{-2}$, a vonal szárnyáról beszélünk, sorfejtéssel kapható, hogy itt $P(\Delta\omega) \approx \gamma\Delta\omega^{-2}$. A $\Delta\omega \approx 0$ tartományt a vonal magjának nevezzük, itt $P(\Delta\omega) \approx (4/\gamma)[1 - 4(\Delta\omega/\gamma)^2]$, ez egy $\exp\{-4(\Delta\omega/\gamma)^2\}$ haranggörbe sorfejtésének első tagja. Végül megbecsüljük a két ütközés közötti t_0 időtartamot. Kiszemelt atomunk

$$l = v_0 t_0 \quad (9.15)$$

átlagos távolságot fog megtenni két ütközés között, l -t szabad úthossznak nevezzük, v_0 vehető a Maxwell-sebességeloszlásból, vagyis (7.4)-ből. A két ütközés között egyenesnek és egyenletesnek tételezzük fel atomunk mozgását, a σ keresztmetszetű atom az $l\sigma$ térfogatot fogja lefedni. Ha ez a térfogat eléri az adott n sűrűségű plazmában az egy részecskére jutó n^{-1} térfogatot, bekövetkezik az ütközés, tehát

$$t_0 = \frac{1}{nv_0\sigma}. \quad (9.16)$$

A hidrogénatomok sugara alapállapotban körülbelül $a_0 = 5,29 \times 10^{-9}$ cm, $\sigma \approx a_0^2\pi$, $T = 10^4$ K hőmérsékletű hidrogénplazmában (7.4) szerint $v_0 = 1,29 \times 10^6$ cm/s, $t_0 = 8,9 \times 10^9/n$ s. Az első gerjesztett állapotban a sugár $4a_0$, σ tizenhatszorosára nő, amivel $t_0 = 5,5 \times 10^8/n$ s. Mivel egy elektromágneses megengedett átmenet körülbelül 10^{-9} s alatt zajlik le, a szuperóriás csillagok légkörében $n \approx 10^{12}$, fehér törpékében $n \approx 10^{18}$, ezekkel az értékekkel $O(t_0) = 10^{-3} - 10^{-9}$ s. A szuperóriások színekében tehát nem az ütközési kiszélesedés dominál, míg a fehér törpékben már számottevő. Ha ránézünk egy színekpre, e sajátosság következményei első pillantásra szembeszökőek: szuperóriások színekében a Balmer-sorozatban is Doppler-profil látunk, míg egy fehér törpénél vagy egy fősorozatú csillagnál szembeötlő a Balmer-vonalakban a Lorentz-profil szerinti széles vonalszárny $\Delta\lambda^{-2}$ szerinti lecsengése.

9.1.2. Természetes vonalkiszélesedés

A természetes vonalkiszélesedés a gerjesztett atomi állapot véges $T_m (= t_0)$ (!) élettartamából fakad, és az adott szint jellemzője: egy plazmán valamennyi T_m élettartamú szintre azonos, függetlenül attól, hogy milyen atomról, ionról van szó. Ezzel azt akarjuk mondani, hogy ez az atom (ion) sajátosságaiból következik, nem a mozgásából vagy a környezetével való kölcsönhatásból. Számszerűen a Heisenberg-féle határozatlansági relációból becsülhető meg:

$$\Delta E_m \approx \hbar/T_m, \quad (9.17)$$

illetve

$$\Delta\omega \approx (T_m)^{-1}, \quad (9.18)$$

ahol ΔE_m az m szint energiájának bizonytalansága.

A látható fényre $\omega \approx 10^{15}$ s $^{-1}$, míg egy átlagos megengedett vonal olyan szintekből szokott származni, amelyeknek élettartama $T_m = 10^{-9}$ s nagyságrendjébe

esik, ebből következik, hogy a színeképvonal szélessége, $\Delta\omega/\omega = \Delta\lambda/\lambda \approx 10^{-6}$, a csillagászatban fontos színeképvonalakra ez elhanyagolhatóan kicsiny. Két konkrét szám példa: a Ca II H és K vonala 396,847 és 393,366 nm-nél van, ezekre $T_m^{-1} = A_{mj} = 1,50 \times 10^8$ és $1,46 \times 10^8 \text{s}^{-1}$, a j végállapotokra a (8.12) szerinti szummázás itt egy tagra redukálódott. A Na I D₁ és D₂ vonala 588,995 és 589,592 nm-nél van, mindkettőre $T_m = 1,59 \times 10^{-8} \text{s}$. Ezek rezonancia vonalak, s ennél lényegesen rövidebb élettartamú szintek nemigen ismertek. Ugyanakkor gyanítjuk, hogy a 6.1. fejezetben említett kételektronos folyamatokban a gerjesztett állapot élettartama sokkal kisebb a 10^{-9}s -nál. A fotoszférákban nem keletkeznek ilyen vonalak, de a Nap koronájában, esetleg a csillagközi gázban azonban valószínűleg igen: e területen az asztrofizika még nagyon gyermekcipőben jár, s ezért legfeljebb sejtéseink vannak róla, hogy mely vonalak tartoznak ide.

A gerjesztett szint véges élettartama szemléletesen azt is jelenti, hogy az atomunk által kibocsátott elektromágneses hullámvonulat bár monokromatikus, de véges hosszúságú. A véges t hosszúságú vonulat valószínűségét (8.11) szerint az e^{-t/T_m} eloszlás adja meg. Ezért a természetes vonalkiszéledés Lorentz-profilra vezet T_m^{-1} félszélességgel.

A Lorentz-féle klasszikus elektronelméletben a magárahagyott oszcillátor — $E_0 = 0$ (8.38)-ben — csillapodni fog, ha kiszámítjuk ennek a csillapodó rezgésnek a Fourier-spektrumát, akkor megkapjuk a természetes vonalkiszéledés klasszikus analógiát. Ezen keretek között azonban arról nem tudunk számot adni, hogy miért más-más a különböző atomok, ionok rezonanciavonalainak a szélessége, mert a klasszikus elektronelméletben a csillapodást egységesen (8.31) írja le, ez pedig csak az ω_0 sajátfrekvenciát tartalmazza, ami ω_{mj} -nek felel meg, a (8.62)-ben definiált átmeneti mátrixelemnek, amitől végülis $T_m = 1/\sum_j A_{mj}$ függ, azonban nincs analógja a klasszikus elektronelméletben.

9.1.3. Doppler-kiszéledés

A Doppler-effektus miatti vonalkiszéledést úgy kapjuk meg, hogy a Maxwell-Boltzmann-statisztikából a látóirányú u sebességkomponens eloszlását használjuk fel (7.6) szerint. Bevezetjük a

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D} = \frac{u}{v_0} \quad (9.19)$$

jelölést, ahol

$$\Delta\omega_D = \frac{\omega(2kT/m)^{1/2}}{c} \quad (9.20)$$

a (7.4)-ben adott v_0 sebességhez tartozó körfrekvencia eltolódás. Ezt (7.6)-ben felhasználva normálás után kapjuk, hogy

$$P(\Delta\omega) = \frac{1}{\pi^{1/2}\Delta\omega_D} \exp\left\{-\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D}\right)^2\right\}. \quad (9.21)$$

Az intenzitás eloszlása tehát a Doppler-effektus következtében haranggörbe lesz, amelynek maximuma ω_{mj} -nél van.

Végül csak röviden megemlítjük azt a lehetőséget, hogy ha a plazmában nem Maxwell-eloszlást követ a sebesség, például rendezett mozgások vagy nagy sebességű örvénylések miatt, amelyeknek méretskálája kisebb, mint az optikai vastagság eléréséhez szükséges távolság, a Doppler-effektus természetesen (9.4.3)-tól eltérő $P(\omega)$ -t is okozhat. A (7.38) kapcsán említett mikroturbulencia ugyan változatlanul hagyja a haranggörbét, de a $\Delta\omega_D$ félszélesség megnő: $\omega\xi_t$ -t ugyanis hozzá kell még adni (9.4.2) számlálójához.

9.1.4. Nyomási vonalkiszélesedés

A csillaglégkört alkotó plazmában $\approx 10^{15}\text{cm}^{-3}$, vagy még több szabad részecske (atom, ion, elektron) van. Az atomok, ionok nehezebbek lévén nagyjából állónak tekinthetők a mozgékony elektronokhoz képest, ezért a fémek sáv spektrumához hasonló színeképet várunk. A bonyolultság miatt azonban kvantummechanikai soktestproblémaként nem tudjuk tárgyalni a rendszer kialakuló (kvázi)stacionárius állapotait, amelyek közötti átmenetektől lesz aztán a színekép.

Az előbbi megközelítés helyett kiszemelünk egy darab sugárzó atomot, vagy iont, és megróbáljuk a sugárzó atom, ion kölcsönhatását leírni a környezetével, majd a környezet lehetséges konfigurációira átlagolunk. A környezet kicsit perturbálja a j és m szinteket, amelyek között az átmenet lezajlik. Még ez a kölcsönhatás is igen bonyolult kvantummechanikai soktestproblémaként tárgyalható, amelynek csupán közelítő megoldásában reménykedhetünk, mivel a környezetben lévő elektronok, ionok mozognak is, tehát időtől függő potenciális energiát jelentenek a sugárzó atom számára. Kvantitatív tárgyaláshoz lehetne kiindulópont a (8.59) Schrödinger-egyenlet, amelynek $H'(\mathbf{r}, t)$ tagjában ezúttal az elektromágneses sugárzáson kívül van még egy $P(\mathbf{r}, t)$ potenciális energia is, amely a sugárzó atom (ion) környezetében nyüzsgő töltött és semleges részecskék hatásának eredője. A probléma illetően tárgyalása előtt is tornyosul a következő nehézség.

Ha kvantummechanikai tárgyaláshoz nyúlunk, a perturbáló részecskék nem tekinthetők klasszikus pályán mozgó részecskéknek, legalábbis akkor, amikor a sugárzó atomot olyannyira megközelítik, hogy a $\lambda = h/p$ de Broglie-hullámhosszuk és a távolságuk az atomtól azonos nagyságrendbe esik. Ez asztrofizikai plazmákban nem is túl ritka: (7.4) felhasználásával a protonokra és elektronokra

$$\lambda_p = h(2m_p kT)^{-1/2} = 3.808 \times 10^{-7} T^{-1/2} \text{cm} = 58.2 T^{-1/2} a_0 \quad (9.22)$$

$$\lambda_{e^-} = \lambda_p = 2.49 \times 10^3 a_0 T^{-1/2} \quad (9.23)$$

$T = 10^4\text{K}$ esetén $\lambda_{e^-} \approx 25a_0$, $a_0 = 5.29 \times 10^{-9} \text{cm}$ az első Bohr sugár. (A fehér törpék légköre a legsűrűbb, benne az atomok átlagos távolsága $10\lambda_{e^-}$ nagyságrendjébe esik.) Ilyenkor valójában egy kvantummechanikai soktestproblémával állunk szemben, amelyet megoldva stacionárius állapotok sokaságát kapnánk, s az ezek közötti

átmenetek adnák a színeképet. Ezen stacionárius állapotok a zavaratlan atom (ion) színeképvonalai környékén igencsak megsűrűsödnének, szinte helyesebb volna vonalak helyett egy véges félszélességű folytonos eloszlásról beszélni, ami tulajdonképpen a vonalprofil. Ez a fizikushoz illő megközelítési mód bármennyire vonzó is, sajnos gyakorlatilag megoldhatatlan. Ezért egyszerűsített modellekhez kell folyamodnunk, amelyek közül a leegyszerűsítés két lehetséges pólusát most bemutatjuk.

Kvázisztatikus vonalkiszélesedési elmélet

A kvázisztatikus, vagy talán helyesebben a statisztikus vonalkiszélesedési elméletekben a sugárzó atom helyén a különböző távolságokban lévő töltött perturbáló részecskék által keltett térerősség eloszlását határozzuk meg. Nyilvánvaló, hogy csak az \mathbf{E} elektromos térerősséggel kell törődnünk, mert alig mozognak a perturbáló részecskék ebben a képben, valamint a nemrelativisztikus sebességek miatt a $(e/c)\mathbf{v} \times \mathbf{H}$ Lorentz-erő sokkal kisebb, mint a $e\mathbf{E}$. Az elmélet nehézségi fokozatait az jelenti, hogy csak a legközelebbi szomszéd hatásával foglalkozunk-e, vagy távolabbi perturbáló részecskék hatását is összegezzük.

A sugárzó atom helyén levő elektromos tér az atomunk színeképet módosítja a (lineáris, esetleg kvadrátikus stb.) Stark-effektus által, a térerősség eloszlása adja meg a $\Delta E_j, \Delta E_m$ energiaperturbációk eloszlását, amiből a $\Delta E_m - \Delta E_j = \hbar\Delta\omega$ segítségével frekvenciaeltolódás eloszlása lesz. (A sugárzás pillanatszerű, és az erre a pillanatra érvényes energiaperturbációnak megfelelő frekvenciaeltolódással történik — Frank–Condon-elvnek is nevezik ezt a kijelentést, érvényességi körének tárgyalása jegyzetünk kereteit meghaladja.)

A kulcskérdések tehát a következők:

- meg kell határozni azt a valószínűséget, amellyel az adott térerősség előfordul (ez nyilván a töltött részecskék számsűrűségétől függ),
- a térerősség függvényében az energiaperturbációt kell meghatároznunk,
- majd képezni kell az összes lehetséges térerősségre átlagolt vonalkiszélesedést, vonaleltolódást. Ezt az utat először J. Holtsmark vázolta 1919-ben. Azóta természetesen jelentős fejlődésen ment át ez az elméleti megközelítés, amelyet nem feladatunk vázolni. Az alapgondolat azonban ma is az itt vázolttal egyezik meg.

Ütközési vonalkiszélesedés elmélet

Az ütközési vonalkiszélesedés elméletének alapjait H. A. Lorentz rakta le, majd körülbelül 1940-re lett teljes az elmélet főleg V. Weisskopf és E. Lindholm munkái nyomán. Véges hosszúságú monokromatikus rezgésnek fogja fel az elmélet az atomok, ionok sugárzását, és a kulcskérdés e rezgés hosszúságának megállapítása. A lépések a következő három mondatban foglalhatók össze.

- A sugárzó atom egy $R(t)$ távolságban lévő klasszikus pályán haladó perturbáló részecske miatt

$$\Delta\omega = C/R^p \quad (9.24)$$

körfrekvencia eltolódást szenved, p egy egész szám.

- Ha képezzük az

$$\eta = \int_{t_1}^{t_2} \Delta\omega dt \quad (9.25)$$

fáziseltolódást, $\eta = 2\pi \cdot t$ felfoghatjuk úgy, mintha az atom egy teljesen új rezgési ciklusba kezdett volna, tehát az atom sugárzása $t_2 - t_1$ hosszúságú zavaratlan monokromatikus szinuszhullámokból áll.

- Átlagolunk a plazmán belüli összes lehetséges részecsketrajektóriára, vagyis különböző hosszúságú vonulatok sokaságára, némi számolással megmutatható, hogy ez a vonalkiszéledési mechanizmus Lorentz-profilra vezet, amint ezt sejtjük a 9.1.1. alfejezetben kapott eredmény alapján.

Egyesített vonalkiszéledési elmélet

Az említett két lehetséges pólus között helyezkedik el az, amit az 1990-es évek óta a legmodernebb vonalkiszéledési elméletnek tart a tudományos közvélemény: egyesített vonalkiszéledési elmélet címszó alatt találhatók meg a különböző változatai. A lényeges alapfeltevés, a továbblépés az előző két pont alatt találhatóhoz képest az, hogy az egy sugárzó atomra jutó átlagos térfogaton belül található perturbáló részecskék (elektronok, ionok, semleges atomok) hatását Monte Carlo szimulációval vesszük figyelembe, s ezek a részecskék már mozoghatnak is, igaz, klasszikus pályán.¹ Eredménye az egyesített vonalkiszéledési elméleteknek, hogy az ionok lehetséges mozgása miatt a vonalprofil elmosódottabb, kevesebb részletet tartalmaz, mint a statisztikus és az ütközési elméletek alkalmazása, ha a statisztikus elméletet az ionokra, az ütközést pedig az elektronokra alkalmazzuk. Ezek a viszonylag újkeletű eredmények sokkal jobb összhangban vannak a laboratóriumi plazmaspektroszkópiából és a csillagászati spektroszkópiából származó kísérleti és megfigyelési eredményekkel: például a H_β vonal kísérletileg megmért, vagy csillagszínképekben megfigyelt profilja sokkal simább, kevesebb szerkezetet tartalmaz, mint azt a statisztikus és az ütközési elmélet adja. Az egyesített elmélet keretei között sikerült

¹Mint ismeretes, Monte Carlo egy játékbarlang székhelye, ahol nagyszámú kísérlet zajlik le a bank kifosztására, minden egyes kísérlet ugyan más-más, de ez mit sem változtat a statisztikusan megjósolható végeredményen, nevezetesen, hogy a bank nem lesz kifosztva. A Monte Carlo szimuláció aztán úgy jön itt az asztrofizikába, hogy a lehetséges részecskeeloszlásokat és trajektóriákat nagyon sok egyedi esetre kiszámítják, s ebből jobban lehet következtetni a sugárzó atomot érő perturbációk ΔE_j , ΔE_m eloszlására, mintha csak az elektronok mozgását vesszük figyelembe az ütközési vonalkiszéledési elmélet keretei között. Egy konkrét részecskeeloszlás, egy konkrét részecsketrajektória felel meg a bank egy kifosztási kísérletének.

először olyan H_β vonalprofilokat számolni, amelyek egész jól emlékeztetnek a megfigyelt profilokra. (A fő diszkrépancia az volt, hogy az előbb említett feltevésekkel számolva a H_β profilnak kettős csúcsa volt, ezt sikerült eltüntetni az egyesített elmélettel.)

9.1.5. Kölcsönhatások a plazmán belül

Központi kérdés minden vonalkiszélesedési elméletben $\Delta\omega$ kiszámítása, ami a plazmán belüli kölcsönhatások mikroszkopikus tanulmányozásával végezhető el, illetve alapozható meg kvantummechanika alkalmazásával.

A részletekbe nem bocsátkozunk, csupán a következő sorfejtéssel vázoljuk a kiindulópontot. Egy R távolságban levő Ze töltésű részecske által keltett Coulomb-térben az atommagtól $r \ll R$ távolságban lévő elektron számára a potenciális energia perturbációja

$$\frac{Ze^2}{(R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta)^{1/2}} = \frac{Ze^2}{R} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^l, \quad (9.26)$$

ahol θ az R és r közötti szög, P_l pedig az l -edik Legendre-polinom.² Mivel $P_0(\cos\theta) = 1$ nyilvánvaló, hogy a részecske által keltett energiaperturbáció első közelítésben $r \ll R$ miatt egy Ze^2/R homogén tag. Ez minden energiaszintet egységesen tol el, ezért a megfigyelt színekre semmilyen hatást nem gyakorol. A második tag egy R irányú Ze/R^2 erősségű homogén elektromos mezőbe helyezett elektron Ze^2z/R^2 potenciális energiája, ahol $z = r\cos\theta$. Ha a sugárzó atom koordináta-rendszerének z tengelyét R felé irányítjuk, megkapjuk a Stark-effektus tankönyvekből is jól ismert tárgyalásmódját

$$F = Ze/R^2 \quad (9.27)$$

térerősséggel. A szakirodalomban alig található olyan elméletek, amelyek (9.26)-ben a másodikon túli tagokat próbálnák figyelembe venni. Ezek a tagok a sugárzó atomnál keltett perturbáló elektromos mikromező görbületét írják le: a vonalkiszélesedéshez nem sokat tennének hozzá, a vonaleltolódáshoz azonban lehetnek számottevők is.

Ha a perturbáló részecske semleges, (9.26)-hoz hasonló egyszerű formula nem írható fel a kölcsönhatásra. Ilyenkor a sugárzó atom és a perturbáló részecske polarizálja egymást, s ez az R távolságuk igen magas hatványával, legalább R^{-6} szerint lecsengő van der Waals-típusú kölcsönhatási energiára vezet. Bár voltak kísérletek a szakirodalomban az ilyen kölcsönhatások kvantitatív tárgyalására molekulafizikai analógiák, számítási módszerek felhasználásával, a kísérletek mind megbuktak azon, hogy a vonalkiszélesedési elméletekhez a kölcsönhatási energiák R függvényében 10^{-6} pontosan szükségesek, s ez már igen egyszerű elektronkonfigurációjú atomok esetén is szinte lehetetlen.

²(9.26) bal oldala a Legendre-polinomok generátorfüggvénye.

Most visszatérünk (9.24)-höz, amelyben $p = 2, 3, 4, 6$ fontos asztrofizikai szempontból. Hangsúlyozni kell, hogy (9.24) a statisztikus vonalkiszélesedési elméletben is érvényes, legfőljebb az itt időtől független R^{-p} -t át kell számítani például (9.26) alapján térerősségekbe. Az ütközési elmélet specifikuma a (9.25) fáziseltolódás bevezetésével kezdődik.

- $p = 2$ a lineáris Stark-effektus. Ha a Z_1 tölésű mag Coulomb-potenciáljához (9.27)-t hozzáadjuk, a parabolikus koordinátákban felírt Schrödinger-egyenlet,

$$\left(\frac{1}{2}\Delta + E_{n_1 n_2 n_3} + \frac{Z_1}{r} - Fz\right)\psi = 0, \quad (9.28)$$

hidrogénszerű ionokra perturbációs számítással megoldható. (Atomi egységekben $\hbar = 1, e = 1, m_e = 1$ – írtuk fel (9.28)-t.) Az energiasajátérték

$$E_{n_1 n_2 n_3} = -\frac{Z_1^2 m_e e^4}{2\hbar^2 n^2} + \Delta E_{n_1 n_2}^{(1)} + \Delta E_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} + \dots, \quad (9.29)$$

ahol

$$\Delta E_{n_1 n_2}^{(1)} = \frac{3Fn}{2Z_1}(n_1 - n_2), \quad (9.30)$$

n_1, n_2 az elektromos kvantumszám. (A kapcsolat a jobban ismert kvantumszámokhoz: a főkvantumszám $n = n_1 + n_2 + |n_3| + 1$, a mellékvantumszám $l = n_2 + |n_3|$, n_3 a mágneses kvantumszám.)

A $\Delta E_{n_1 n_2}^{(1)}$ elsőrendű korrekció azért különbözik nullától, mert mag Z_1/r tiszta Coulomb-terében a szintek l szerint degeneráltak. Ebből következik, hogy csak a hidrogénszerű ionok érzékenyek a lineáris Stark-effektusra, amely például csillagok színképében a Balmer-vonalak kiszélesedéseért felelős. Mivel $\Delta E_{n_1 n_2} = -\Delta E_{n_2 n_1}$ a lineáris Stark effektus mindig szimmetrikus vonalprofilt hoz létre.

F atomunk helyén az elektromos térerősség, (9.24)-ben (9.30) közvetlenül felhasználható:

$$C = \frac{3Ze}{2\hbar Z_1}[n'(n'_1 - n'_2) - n''(n''_1 - n''_2)] \quad (9.31)$$

ahol a vonal a $'$ és $''$ -vel megjelölt kvantumszámú állapotok közötti átmenetből származik. Mivel sokféle ilyen átmenetből tevődik össze egy Balmer-vonal, az $n' = 2$ -höz és n'' -khöz tartozó állapotokat az átmeneti valószínűségek szerint súlyozva mind figyelembe kell venni.

- $p = 3$ azonos részecskék kölcsönhatásából származik, de (9.26) harmadik tagja is nyilvánvalóan ilyen frekvenciaeltolódást hoz. Ez szimmetrikus vonalkiszélesedést okoz, ha a $+$ és a $-$ töltésű részecskék eredő hatása a sugárzó atomra azonos. Vonaleltolódáshoz, aszimmetrikus vonalkiszélesedéshez akkor vezet, ha a $+$ és a $-$ töltésű részecskék eredő hatása a sugárzó atomra nem azonos.

- $p = 4$ a kvadratikus Stark-effektust jelenti, ami hidrogénre a $p = 2$ kapcsán említett perturbációs számítás második közelítése

$$\Delta E_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} = -F^2 \left(\frac{n}{2Z_1} \right)^4 [17n^2 - 3(n_1 - n_2)^2 - 9n_3^2 + 19]. \quad (9.32)$$

Szemben $\Delta E_{n_1 n_2}^{(1)}$ -gyel $\Delta E_{n_1 n_2 n_3}^{(2)}$ nyilvánvalóan szimmetrikus n_1, n_2 felcserélésére, úgyhogy ahol a kvadratikus Stark-effektus a hidrogén színeképében szóhoz jut, ott már feltétlenül fellép vonaleltolódás is. Ha ezt kirészletezzük, $n_1, n_2, n_3 < n$ miatt (9.32) alapján be lehet látni, hogy ez mindig vöröseltolódást eredményez, mert növekvő n -nel (a Balmer-sorozat egyre magasabb tagjai felé) a $\Delta E_{n_1 n_2 n_3}^{(2)}$ korrekció egyre negatívabb. Fehér törpék légkörében akkora az elektronkoncentráció (az elektromos mikromező átlagértéke az atom helyén), hogy ott ilyen plazmafizikai eredetű vöröseltolódásra számítani kell, nagyságrendje 0,01 nm, ami különben éppen megegyezik az e csillagok légkörében a nagy g miatti gravitációs eredetű vöröseltolódással, ezért a két hatás szétválasztása nem könnyű feladat.

Mivel atomi egységekben $F \ll 1$ a csillaglégkör plazmájában, a $\propto F^2$ kvadratikus Stark-effektus kisebb vonalkiszéledést okoz, mint a lineáris. Ezért van az, hogy a csillagszíneképeket a vizuális tartományban a Balmer-vonalak uralják, ha a hőmérséklet sem túl kicsi, sem túl nagy ($T \approx O(10^4)$ K), mert a hidrogén még nincs ionizálva, de a gerjesztett állapotai már populáltak. A lineáris Stark-effektusra nem érzékeny atomoknál (például a fémeknél, mert azok spektrumában nincs degeneráció l szerint) a kvadratikus Stark-effektus vezet a vonalak kiszéledésére, ez azonban szerényebb. Nem hidrogénszerű ionok Stark-effektusára olyan formulák nem léteznek, mint (9.30) és (9.32), mindazonáltal ha a valenciaelektron távol van az atomtörzstől, (9.32) közelítésre mindenképpen használható. Megjegyezzük még, hogy (9.26) negyedik tagja és (9.32) egyaránt $\propto R^4$, de (9.26) negyedik tagja lineáris Z -ben, míg (9.32) kvadratikus. Mint $p = 3$ kapcsán mondtuk már, a Z -ben lineáris tag vonaleltolódást, valamint aszimmetrikus vonalkiszéledést akkor okoz, ha az ionok és az elektronok hatása a sugárzó atomokra nem azonos. Egyelőre nincs olyan kvantitatív elméleti modell, ami erről és a vonalkiszéledésről számot adna, amely már nem volna feltétlenül szimmetrikus.

- $p = 6$ a van der Waals-típusú kölcsönhatást jelenti, tehát semleges atomok közötti polarizációs típusú kölcsönhatás. Hideg csillagok semleges atomoktól származó gyenge vonalainak a kiszéledéséért felelős ez. Olyan perturbatív tárgyalása nincs a van der Waals-kölcsönhatásnak, mint a Stark-effektusnak, ezért itt C általában félempirikus képletekkel határozható meg.

9.1.6. A Voigt-függvény

A természetes és a nyomási vonalkiszélesedés egyaránt Lorentz-profilra vezet, szokták ezt még diszperziós profilnak is nevezni. Ha mindkét kiszélesítő mechanizmus számottevő, profiljaik konvolúciója adja az eredő profilt:

$$\begin{aligned} L(x_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} L_1(x)L_2(x-x_0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1\gamma_2 dx}{(x^2 + \gamma_1^2/4)[(x-x_0)^2 + \gamma_2^2/4]} \\ &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{x_0^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2/4}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

amint az a reziduumszámítás alkalmazásával kiszámítható. A különböző vonalkiszélesedési mechanizmusokból származó γ félszélességeket tehát össze kell adni. Az így kapott profil konvolúcióját kell aztán még képezni a hőmozgásból származó harranggörbéből, hogy a tényleges vonalprofilokat kapjuk meg, amelyek már mind a hőmozgásról, mind az egyéb kiszélesítő mechanizmusokról számot adnak. Ez utóbbi konvolúcióval kapjuk a Voigt-függvényt:

$$P(\Delta\omega') = \frac{2\gamma}{\pi^{3/2}\Delta\omega_D} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \frac{\exp\left\{-\left[\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D}\right]^2\right\}}{(\Delta\omega - \Delta\omega')^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (9.34)$$

Kiszámítása numerikusan lehetséges, mivel egyre van normálva, az eredmény behelyettesíthető közvetlenül (8.57)-be, s így módon megkaptuk a $\kappa_{\nu,at}$ monokromatikus abszorpciós koefficiens egy színeképvonalban.

Nyilvánvaló, hogy $\kappa_{\nu,at}$ függ T -től, a perturbáló részecskék számsűrűségétől, tehát olyan fizikai mennyiségektől, amelyek a csillag légkörében a τ optikai mélység függvényei. Ezért a csillag felületén az $F_\nu(0)$ vonalprofil sok különböző (9.34) típusú $P(\omega)$ szuperpozíciója lesz (4.20) szerint.

9.1.7. Rotációs vonalkiszélesedés

A csillagászati színeképek vonalkiszélesedésével kapcsolatban meg kell említeni a csillag rotációjának hatását, ami már $F_\nu(0)$ -t átlagolja valamilyen kék-vörös eltolódással a csillag felénk forduló hemiszférájára.

Legyen a csillag középpontjában az xyz derékszögű koordináta-rendszer origója, z tengelye pedig irányuljon felénk, míg az $x'y'z'$ koordináta-rendszer z' tengelye mutasson a csillag rotációs tengelye felé, y' tengelye pedig legyen az xy síkban, és essék egybe y -nal. Legyen a zz' szög i . Az R_* sugarú, gömbszimmetrikusnak feltételezett csillag egy pontjának sebessége $\dot{\varphi}$ szögsebesség esetén

$$\dot{x}' = R_*\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi, \quad \dot{y}' = R_*\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi, \quad \dot{z}' = 0. \quad (9.35)$$

Mivel csak \dot{x}' -nek van z irányú komponense, csak ezzel kell törődnünk az $x'y'z'$ koordináta-rendszerbeli sebesség radiális sebességgé (z irányú sebességgé) transzformálása során:

$$\dot{z} = \dot{x}'\sin i + \dot{z}'\cos i = R_*\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\sin i = v_{eq}\sin i\sin\theta\sin\varphi. \quad (9.36)$$

Ebből nyilvánvaló, hogy a rotáció által módosított színeképből csak $v_{\text{eq}} \sin i$ határozható meg, úgy hogy a csillag felénk forduló hemiszférájára vesszük azokat a (θ, φ) tartományokat, amelyekben \dot{z} konstansnak tekinthető, s $\Delta\nu/\nu = \dot{z}/c$ -vel eltoljuk $F_\nu(0)$ -t, majd átlagolunk a tartományokra. Az új profil is szimmetrikus marad, ha $F_\nu(0)$ az volt: $v_{\text{eq}} \sin i \neq 0$ a vonalakat kiszélesíti, a vonal magját laposabbá teszi, ezért könnyű felismerni. A rotáció hatásának kvantitatív részletezése meghaladja jegyzetünk kereteit.

Az itteni megfontolás csak nem túl gyors rotáció esetén érvényes. A nagyon gyors rotáció ugyanis torzítja $F_\nu(0)$ -t olyanformán, hogy a csillag egyenlítője felé haladva a légkör hőmérséklete számottevően csökken, amihez természetesen a ϑ polárszögtől függően nagyon különböző $F_\nu(0)$ tartozhat. T_e -t (2.47) alapján az egész csillagra lehet csak definiálni, ezért pontos fogalmazás az, hogy az $\int_0^\infty F_\nu(0, \vartheta) d\nu = aT^4(\vartheta)$ összefüggésben az effektív hőmérsékletnek megfelelő $T(\vartheta)$ változik. Például a Vega poláris és egyenlítői területei között $T(\vartheta = 0) \approx 10^4 \rightarrow T(\vartheta = \pi/2) \approx 8 \times 10^3$ K a csökkenés. Ugyanakkor figyelemre méltó, hogy a $T_e \approx 9650$ K, $\log g \approx 3.95$ ATLAS modell meglepően jól adja vissza $F_\lambda(0)$ -t, amint ez a 3.2. ábrán jól látszik.

A XXI. század eleje óta interferometrikus úton sikerült felbontani néhány csillagot koronggá. Az Achernar (α Eri) volt az első, azóta több korai színeképtípusú csillagot is sikerült találni, amelyek olyan gyorsan forognak, hogy a szétszakadási határon vannak, tehát $v_{\text{eq}} \approx 200$ km s⁻¹, vagy még több, amiért alakjuk korong helyett forgási ellipszoid.³

³Szám példa: a centrifugális gyorsulás cgs egységekben 10^6 km sugarú csillagra $v^2/R = 4 \times 10^{14}/10^{11}$, tehát $\log g_{\text{centrifugális}} \approx 3.6$. Ez az érték egy fősorozati, vagy szubóriás csillag $\log GM/R^2 \approx 3.5 - 4.5$ légköri sztatikus nehézségi gyorsulásával azonos nagyságrendbe esik.

10. fejezet

CSILLAGSZÍNKÉPEK KIÉRTÉKELÉSE

A monokromatikus sugárzási egyensúly feltevésével kiszámítottuk a csillagunk légkörét elhagyó monokromatikus fluxust – l. (4.20), – majd megismerkedtünk azzal, hogy mi mindenre van szükség (4.20) kiszámításához. Ez a fluxus jelenik meg távcsövünk fókusz síkjában (rögzíthető többféle módon), s ebből kell kihámozni a (4.20) értékét befolyásoló mennyiségeket, csillaglégkörünk modelljének paramétereit. A munka hatékony elvégzésére vannak különböző gyakorlati eljárások, ezeket röviden vázoljuk ebben a fejezetben, s pár szót szólnunk végül az alkalmazásukkal kapott eredményekről is.

Az eljárások, gyakorlati receptek három lépcsője a következő.

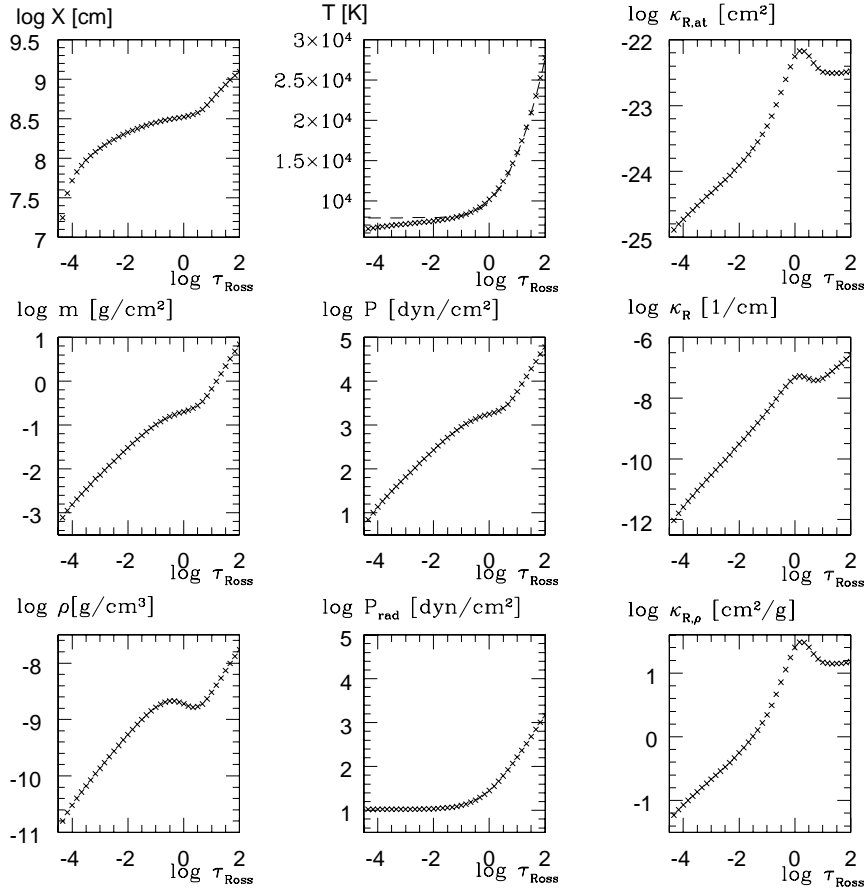
- Először foglalkozni kell a kontinuummal, vagyis $F_\lambda(0)$ általános menetével, ebből meg kell becsülni a légkörmodell fő paramétereit – T_e , g , fémesség.
- A fő paraméterek birtokában következhet a durva analízis, amely már a vonalakkal foglalkozik, azoknak főleg az ekvivalens szélességét használja. A légkörmodell fő paramétereinek pontosítása is része ennek a lépcsőfoknak. Az átlagos fémesség helyett itt már közelítő információt lehet kapni az egyes kémiai elemek légköri gyakoriságáról.
- A finom analízis a vonalprofilok reprodukálásával finomítja a durva analízisből kapott modellparamétereket, elemgyakoriságokat. Lehetővé teszi egyéb fizikai mennyiségek meghatározását, mint például oszcillátor erősségek, vonalkiszélesedéshez kapcsolódó paraméterek, valamint rotáció, foltosság, mágnesesség stb. meghatározását.

Összefoglalóan spektrum szintézisnek is nevezik néha a szakirodalomban az itt vázolt eljárást, mert az elmélet bemenő paramétereinek variálásával mintegy szintetizáljuk a megfigyelésekkel összevethető színképet.

10.1. Az ATLAS légkörmodellek

A csillaglégkörök modellezése gépi nagyiparrá vált, ahogy ennek történetét átfutjuk megértjük azt is, ami ma a területen a csúcs, a *non plus ultra*: az ATLAS modellcsaládot.

A kiindulás a szürke modell, amelynek a hőmérsékletét addig kell korrigálni, míg a modell a kívánt mértékben konstans fluxusú nem lesz. A XX. század hatvanas éveiben a k-sz, sz-sz átmeneteket tudták csak bevonni a számításokba, tehát a hidrogén, a H^- , He, esetleg a fémek kontinuumát. A hetvenes években a számítástechnika rohamos fejlődése lehetővé tette a Balmer-vonalak bevonását is, amitől a korrigált $T(\tau)$ meredekebb lett. Az 1980-as évek fejlődése pedig már a sokmillió gyenge vonal figyelembevételét is lehetővé tette. R. L. Kurucz ATLAS modellcsaládjá futotta végig ezt az utat, az ezredfordulóra a 9. generáció is meglett az ATLAS modellekből, illetve a kiterjesztések, a NEXTGEN modellcsalád. Nemcsak a sugárzás áramlását tárgyalják e modellcsaládok, hanem természetesen a konvektív fluxust is figyelembe veszik, ami a mélyebb rétegekben lehet számottevő. Egy modell végső soron olyan rétegződések megadását jelenti, amelyeket a 10.1. ábrán látunk, valamint az egyes modellekből feljövő spektrumot, F_λ -t.



10.1.ábra. A Vega légkörmodelljének fizikai jellemzői. ($T_e = 9650\text{K}$, $\log g = 3.95$.)
 X : geometriai mélység, m : oszlopsűrűség, P_{rad} a sugárnyomás.

Az ilyen és a hasonló diagramokról leolvasható, hogy növekvő T_e -vel nő a légkör vastagsága, a Napé kb. $10^{7.7}\text{cm} \approx 400\text{km}$ mélységben válik optikailag vastaggá, míg a kb. A0V színeposztálynak megfelelő modell pedig $10^{8.5}\text{cm} \approx 3000\text{km}$ mélységben. Látnivaló, hogy a Rosseland-féle κ növekszik τ -val. A felső sor középső diagramján a szaggatott vonal egy szürke modell hőmérséklet rétegződése (5.16) szerint. Látnivaló, hogy a konstans fluxusú és a szürke modell közötti korrekció, amit az 5.5. szakaszban vázoltunk, csupán a $0 \leq \tau \approx 0,01$ tartományban jelentős. A $\log m - \tau$ diagramból látszik, hogy a modell ott válik optikailag vastaggá, ahol az oszlopsűrűség kb. $0,3\text{gcm}^{-2}$ lesz. Ez az érték nagyjából ennyi más modellekre is. A sugárnyomás a legkülső tartományban meghaladja a gáznyomást.

Fontos megjegyzés. A Nap légkörének tömege $4\pi R_\odot^2 \bar{\rho} \approx 12.56 \times (6.95 \times 10^{10})^2 \times$

$0.3g = 1.82 \times 10^{22}$ g, ami $\approx 10^{-11}$ -ed része a Nap tömegének. Más csillagokra is hasonló arányok állnak fenn, tehát a légkör elenyészően csekély hányadát adja egy csillag tömegének. Ezt sosem szabad elfelejteni, amikor a csillagok, vagy éppen az Univerzum kémiai összetételéről beszélünk a csillagászati spektroszkópia eredményeiből kiindulva.

Modellezést elméleti szempontból összegezve mondhatjuk, hogy a radiatív és a konvektív energiátanszport kérdése nagyjából le van zárva, tudjuk azt, ami egy csillag légkörében a hőmérséklet stb. rétegződésének kiszámításához kell. A keveredési hosszal pedig sikerült egy olyan paramétert találni, amelynek megfelelő értékre állításával a konvekció jobb megismerése esetén is az új tudás a modellekbe beépíthető lesz.

10.1.1. A vonalas színekép

A vonalas színekép értelmezéséhez az oszcillátorerősségek és főleg a vonalkiszélesedési elméletek területén még vannak fehér foltok. El kell döntenünk, hogy milyen vonalkiszélesedési elméletet akarunk használni, meg kell tudnunk az irodalomból a kiszámítandó vonalakhoz tartozó $g_j f_{jm}$ értékeket, s ezután lehet szó a Schwarzschild-féle integrodifferenciál-egyenlet megoldásáról, ami a vonalon belüli F_λ -t fogja megadni, ha S_ν izotrop (4.20) szerint.

A vonalas színekép kiszámítása, legalábbis első közelítésben úgy történik, hogy a (konstans fluxusú) légkörmodell $T(\tau_{\text{Ross}})$, $\varrho(\tau_{\text{Ross}})$ rétegződésének birtokában ismerjük a $\kappa_\lambda(\tau_{\text{Ross}})$ értékét minden τ_{Ross} optikai mélységben, amiből $d\tau_\lambda = \kappa_\lambda dx$ és $d\tau_{\text{Ross}} = \kappa_{\text{Ross}} dx$ hányadosából integrálással adódik, hogy

$$\tau_\lambda = \int \frac{\kappa_\lambda}{\kappa_{\text{Ross}}} d\tau_{\text{Ross}}. \quad (10.1)$$

A forrásfüggvénynek vesszük a Planck-függvényt a megfelelő λ hullámhosszon, és az integrálás határainak megfelelő beállításával (10.1)-ben máris megvannak a (4.22) szumma tagjai, tehát $F_\lambda(0)$ 1-2% pontosan. Ez a lépés elvégezhető bármilyen, tehát nem csak ATLAS modellekből származó $T(\tau_{\text{Ross}})$, $\varrho(\tau_{\text{Ross}})$ rétegződésekkel.

A XXI. század elején már elérhetőek olyan programok, főleg az ATLAS légkörmodellekhez kapcsolódóan, amelyek ezt a legutolsó lépést is automatizálják, de a felhasználónak akkor is illik tudnia a bemenő elméleti háttérrel, hogy meg tudja majd válaszolni a program kérdéseit. Példa gyanánt csak egy fontos kérdést említünk: a 9. fejezetben vázolt vonalkiszélesedési elméletek közül melyiket is használja a program, mert ezek igen különböző eredményekre, vonalon belüli F_λ -ra vezethetnek. (Például a Balmer vonalak ekvivalens szélességében akár kettes faktor is lehet a különbség.)

A vonalas színeképben az eligazodás a Walter Grotrian német fizikusról elnevezett Grotrian-diagram ad segítséget. Vízszintes tengelyén az elem egy spektrumán (egy ionizációs fokán) belül az impulzuszórántum lehetséges értékei vannak, a függőlegesen pedig energiaszintek. A lehetséges megengedett és tiltott átmeneteket

különböző nyilak jelzik. Az összimпульzusmomentum 0, 1, 2, 3, 4,... értékét a spektroszkópiából ismert S, P, D, F, G,... betűk jelzik.¹ Egy-egy kémiai elem jelenlétét a légkörben akkor vehetjük bizonyosnak, ha a Grotrian-diagram alapján várható összes vonala megvan a színekben. A vonalak azonosítását megkönnyíti a Charlotte E. Moore által szerkesztett A Multiplet Table of Astrophysical Interest² táblázat, amely tartalmazza a kémiai elem vegyjelét, római számmal azt, hogy hányadik spektrumából ered a vonal, a Moore-féle multiplétszámot és egy empirikus intenzitást. A jelentősen kibővített táblázat manapság is használatos, főleg számítógépre vitt formában.

Szemléltetésül a ... ábra a hidrogén és a hélium Grotrian-diagramja.

10.2. Csillagszínképek néhány sajátossága

Néhány ábra segítségével bemutatunk pár jellegzetességet a csillagok színképéről. Fotometriával a csillagot elhagyó monokromatikus fluxust integráljuk a hullámhossz egy nagyobb tartományára, ezért a csillaglégkör globális paramétereinek tanulmányzására alkalmas eszközt a fotometria. A vonalas színkép a légkör finom szerkezetéről, kémiai összetételről ad részletes információt.

10.2.1. Fotometriából nyerhető információk

A fotometriából nyerhető információkat a Johnson-Kron-Cousins $UBV(RI)_C$ fotometria kapcsán világítjuk meg, de az itt megfogalmazott állítások átvihetők más fotometriai rendszerekre is, amelyekben a magnitúdó és színskála zéruspontjai ismeretesekek.

Mielőtt elhelyezzük csillagunk színindexeit a kétszíndiagramokon az intersztelláris vörösödést ki kell redukálni, mert a csillag valódi színeit torzítja a vörösödés, ha van. Erre az $UBV(RI)_C$ rendszerben a legkézenfekvőbb első közelítés a Tejútrendszeren belül megfigyelt törvényeket használni³:

$$A_V = 3.1E(B - V) \quad (10.2)$$

$$E(U - B) = 0.75E(B - V) \quad (10.3)$$

$$E(V - R_C) = 0.57E(B - V) \quad (10.4)$$

$$E(V - I_C) = 1.24E(B - V), \quad (10.5)$$

ahol $E(B - V) = (B - V) - (B - V)_0$ definiálja a színexcesszust, vagyis $B - V$ -ben a $(B - V)_0$ színindexet figyelni meg, ha nem volna vörösödés csillagunk felé. A (10.2-10.5) formulákat a Rayleigh-szórás (8.48) szórási keresztmetszetéből

¹A betűk a 'sharp, scharf', 'principal, prinzipal', 'diffuse diffus' angol, német szavak spektroszkópiában szokásos rövidítései.

²Contributions from the Princeton University Observatory No. 20, 1945

³forrás: ApJ 354, 273, 1991

elméletileg is meg lehet alapozni. A formulák egyben megadják azt is, hogyan tolnának el egy csillag színindexei egy olyan kétszíndiagramon, amilyen a 10.2. ábrán látható.

A (10.2)-(10.5) összefüggésekről eliminálva $E(B - V)$ -t vörösödéstől független hibrid színindexek is képezhetők, például

$$(U - B) - \frac{0.75}{0.57}(V - R_C) = (U - B)_0 - \frac{0.75}{0.57}(V - R_C)_0 \quad (10.6)$$

$$(U - B) - \frac{0.75}{1.24}(V - I_C) = (U - B)_0 - \frac{0.75}{1.24}(V - I_C)_0 \quad (10.7)$$

$$(B - V) - \frac{1}{0.57}(V - R_C) = (B - V)_0 - \frac{1}{0.57}(V - R_C)_0. \quad (10.8)$$

Ezek a színindexek a Wesenheit-függvény⁴ általánosításai.

Természetesen más galaxisokban lehetnek (10.2-10.5) együtthatói kicsit különbözőek, amint erre megfigyelések utalnak. Ezért a Tejútrendszeren belüli és egy másik galaxisbeli látóirányú vöröseltolódás hatását összegezni kell, hogy végül megkapjuk egy extragalaktikus csillag valódi színeit. Kicsit nagyobb pontossággal pedig úgy vehető figyelembe a vörösödés, ha az intersztelláris anyag monokromatikus abszorpciós koefficiensével redukáljuk a megfigyelt színeket, de erre a (10.2-10.5)-hez képest csekély korrekcióra általában nincs szükség.

10.2.2. T_e , $\log g$ és az $[M]$ légköri fémtartalom

A Balmer-vonalak összeolvadásának környéke és a Balmer-ugrás a Johnson-féle U sávba esik. Az $U - B$ színindex méri ezt az ugrást is: minél negatívabb, annál kisebb a Balmer-ugrás. Ez a (3.3)-ban említett U_0 zéruspont megválasztása és a magnitúdóskála – előjele miatt van. A reláció azonban nem egyértékű függvény a Balmer-ugrás nagysága és az $U - B$ között, mert a csillag légkörében jelenlévő fémek vonalai is nagy számban vannak jelen az U sávon belül.

Sok fősorozati csillag színképének analizálásával leszűrhető az, hogy minél negatívabb az $U - B$, annál nagyobb a csillag légkörében a fémhiány — a hiányzó fémvonalak miatt mélyebbre látunk a csillag légkörébe, tehát a forróbb tartományokat is látjuk, ami ultraibolya excesszusra vezet. Hasonló korreláció, hogy növekvő $\log g$ -vel $U - B$ egyre negatívabb lesz, mert nagyobb g nagyobb elektronnyomással jár, ez pedig az ionizáció ellen dolgozik, tehát κ_ν -t csökkenti 3646 Å-ön túl az ultraibolya tartományban. Mivel 20000 K fölött alig van már ionizálatlan hidrogén csillagunk légkörében, T_e növekedésével is csökken a Balmer-ugrás nagysága, tehát nő az ultraibolya fényesség, $U - B$ egyre negatívabb lesz. Szélesszávú fotometriába a Balmer-vonalak sem adnak század magnitúdónál sokkal többet, ezért a Balmer-vonalak erőssége a B színt, az $U - B$ színindexet alig befolyásolja.

A Paschen-kontinuum ($3646\text{Å} < \lambda < 8203\text{Å}$) a Johnson-féle B , V és kisebb mértékben a Kron-Cousins-féle R_C , I_C színekbe esik bele, ezért a $B - V$, $V - R_C$, $V -$

⁴A Wesenheit-függvényt B. F. Madore vezette be (Royal Greenwich Obs. Bulletin No. 182, 153. o., 1976) δ Cep csillagok intersztelláris vörösödéstől független fényességének a meghatározására.

I_C színindexek alapján a 6000-10000 K fokos tartományban T_e viszonylag jól megbecsülhető, mert a $\log g$ értékétől csak kissé függ. Valamelyest ez már sejthető volt a Wien-féle eltolódási törvényből is, mert e sávokba abszorpciós küszöb nem esik, s csupán a kontinuum hullámhossz függvényében lassan változó κ_ν -je módosítja $S_\nu \approx B_\nu$ -t, ami csak a hőmérséklettől függ.

Ha légkörmodellünk figyelembe veszi a héliumnál nehezebb elemek számos gyenge vonalát azok nyilván módosíthatják kontinuum frekvenciafüggését az $[M]$ légköri fémtartalomról függően. Erről a légköri paraméterről később még szólunk.

Az itt röviden vázolt sajátosságok alapján lehet találni bizonyos fotometriai színindexekben is megnyilvánuló összefüggéseket, amelyek a témával foglalkozó számúra természetes dolgok. Ezek közül felvázolunk most néhányat, de ne feledjük el, hogy a szabályszerűségek természetesen módosulnak, ha például a csillag légköri elemgyakoriságai különlegesek, vagy akkor is, ha a légkör nagyon különleges. Egyáltalán nem alkalmazhatók, ha például egy kvazárt összetévesztünk egy csillaggal. Ugyanakkor ha meggondoljuk, hogy egy galaxis olyan csillagokból áll, amelyek \mathcal{F}_λ fluxusait összegezni kell, egy távoli galaxis színindexei is mondanak valamit csillagairól, ha a vöröseltolódást figyelembe vesszük.

A 10.2 ábra világítja meg az $UBV(RI)_C$ fotometria használatát $T_e, \log g$ és egyéb paraméterek meghatározására a Kurucz-féle légkörmodellek alapján. A bal alsó ábrán láthatjuk, hogy a szaggatott vonalak – a $T_e(\log g)$ – függvények a $B - V, B - R_C, B - I_C, V - R_C, V - I_C, R - I_C$ színindexekből nagyjából együtt futnak, de $\log g$ értékétől függően $T_e = 6100, 6400$ K is lehet. A jobb oldali ábrán a hibás fémesség miatt a $T_e(\log g)$ függvények eltérése elfogadhatatlanul nagy.

Fontos megjegyezni azt, ami az ábrából is egyértelmű, hogy színindex párost kell használnunk egy $(T_e, \log g)$ páros meghatározásához, tehát általánosan megfogalmazva egy

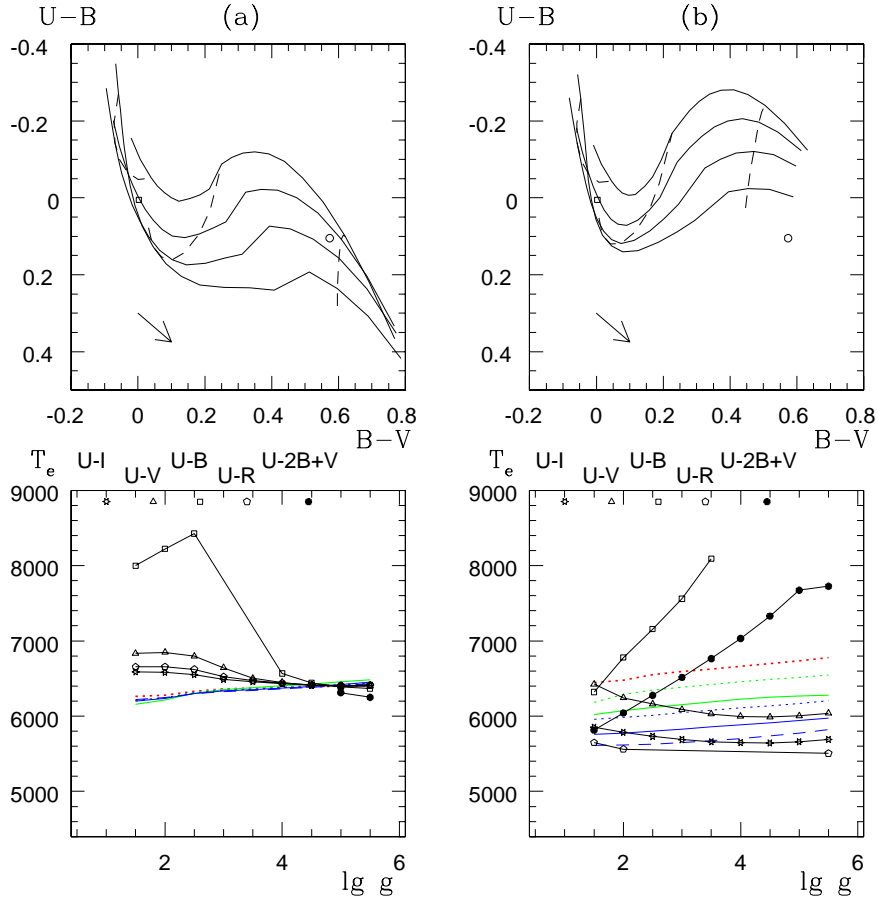
$$[(U - B), (B - V)] \leftrightarrow_{[M], E(B-V)} (T_e, \log g) \quad (10.9)$$

típusú megfeleltetést használunk, rögzített $[M]$ és $E(B - V)$ mellett. $UBV(RI)_C$ fotometriában 4 egymástól független színindexet tudunk képezni, ezek másodosztályú kombinációjából $\binom{4}{2} = 6$ független $(T_e, \log g)$ értékhez juthatunk így, amelyek szórása fontos indikátora fotometriai eredményeink megbízhatóságának, illetve annak, hogy a csillag légköre valóban leírható-e a vástott modellcsaláddal.

A konvencionális $[(U - B), (B - V)]$ stb. páros mellett más alkalmasan választott színindex párosokat is használhatunk, csak egy példaként álljon itt az $[(U - 2B + V), (B - V)]$ páros, amelynek első tagját a Strömgren *uvby* fotometria $u - 2v + b$ gravitációs indexe alapján definiáltuk. A (10.9) megfeleltetés konkrét alakja természetesen más-más lesz, ha a Kurucz-légkörmodellek különböző verzióit használjuk, ha a vörösödött színindexeket használjuk, vagypedig egy más modellcsaládot. Megjegyezzük, hogy az általában kivételes eset, amikor egyetlen (jól megváasztott) színindex jó értéket ad a csillaglégkör egy paraméterére, például T_e -re.

A Wesenheit-függvények(10.6)-(10.8) általánosításával (illetve további hasonló relációk konstruálásával) a fémesség és $E(B - V)$ fotometriai meghatározása elvileg

szétvásztható két lépcsőfokra: először meg lehet kapni a fémességet az intersztelláris vörösödéstől függetlenül, és utána jöhet a vörösödés.



10.2. ábra. A vörösödés nélküli, tehát $E(B - V) = 0$ -hoz tartozó $[(U - B) - (B - V)]$ kétszín diagram a szoláris kémiai összetételre -(a)- és a szolárishoz képest 100-szoros fémhiányra -(b). Az (a), (b) ábrákban a színindexek $E(B - V) = 0.1$ magnitudónak megfelelő eltolódását jelzi a nyíl a bal alsó sarokban. Szaggatott vonalak az (a) és (b) ábrán jobbról balra: a $T_e = 6000, 8000, 10000\text{K}$, vonalak alulról fölfelé: $g = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5\text{cms}^{-2}$. Négyzet és kör: a Vega és a SAO 073957 csillag helye a kétszín diagramon. Az alsó két ábra az $UBV(RI)_C$ rendszerben lehetséges $T_e(\log g)$ függvényeket ábrázolja a SAO 073957 $U - B, \dots, R - I_C$ színindexeihez. A kihúzott vonalak az U -t is tartalmazó színindexekhez tartozó $T_e(\log g)$ függvények, a szaggatottak pedig a $BV(RI)_C$ magnitudók kombinációjából képezhető színindexek.

10.2. alsó két ábráját úgy kaptuk, hogy a 10.2.a,b ábrákban állítottunk egy

vízszintes, illetve függőleges egyenest a körön keresztül a SAO 073957 színindexeihez, és az ezek mentén levő $\log g$, T_e értékeket írtuk a vízszintes és függőleges tengelyre. Tettük ezt nemcsak az $(U - B)$ - $(B - V)$, hanem az összes lehetséges egyéb kétszíndiagramból (tehát az $[(U - V)$ - $(V - R_C)]$, stb diagramokból) származó $T_e(\log g)$ függvényekkel. Ily módon kaptuk meg valamennyi színindexhez tartozó lehetséges T_e , illetve $\log g$ értékeket, a $T_e(\log g)$ függvényeket. A bal oldali a helyes, a jobb oldali egy helytelen fémességhez tartozó $T_e(\log g)$ függvényeket ábrázolja. Nyilvánvaló, hogy ezekből a légköri fémesség becsülhető meg első közelítésben: ha ugyanis rossz $[M]$ -t tettünk fel a különböző színindex párosokból kapott $(\log g, T_e)$ párosok nem fognak egyezni.

Másik fontos következtetés, hogy $\log g$ -t csak akkor tudunk meghatározni az ábrák $6000 < T_e < 10000$ K, $2 < \log g < 5$ tartományában, ha U -t is tartalmazó színindexet használunk. Csupán $BV(RI)_C$ színekből képezett színindexek nem tartalmaznak elegendő információt $\log g$ meghatározásához, mert nagyjából együtt futnak a $T_e(\log g)$ függvények, és metszéspontjuk, ha egyáltalán van, akár $\log g = 2$ -höz vagy éppen 5-höz esik a színindexek néhány ezrelékes változásától.

Az ábrában szereplő SAO 073957 csillag fotometriai adatai: $V = 8.909$ $U - B = 0.116$, $B - V = 0.561$ $V - R_C = 0.328$, $V - I_C = 0.629$, valamint az ezekből lezármaztatott légköri paraméterei: $T_e = 6465 \pm 10$ K, $\log g = 4.80 \pm .10$ $[M] = 0.4$, $E(B - V) = 0.02$. T_e és $\log g$ kicsi szórása mutatja, hogy a feltételezett $[M] = 0.4$, $E(B - V) = 0.02$ helyes. Ha nem sikerül egy csillag megfigyelt színindexeiből elegendően kicsi hibával megkapni $\log g$ -t és T_e -t az azt jelentheti, hogy a Kurucz-modellek számos feltevése közül egy vagy több nem teljesül csillagunk légkörében, de azt is jelentheti akár, hogy a bemenő színindexek közül egy vagy több hibás.

A közepes sáv szélességű fotometriák segítségével T_e mellett $\log g$ és az $[M]$ fémgyakoriság viszonylag jól megbecsülhető a már említett korrelációk alapján. Példaként álljon itt a Strömgren-féle $uvby$ fotometria gravitációs és fémességi indexe: $u - v - (v - b) = u - 2v + b$, $b - 2v + y$. Ez utóbbi azt használja ki, hogy a fémek vonalai a v, b sávba esnek, egyfajta globális fémtartalomra utal ez az index.

A fémesség vonatkozásában másik jó példa a K vonalra és a H_β vonalra szűkített keskenysávú fotometria, szintén a Strömgren-fotometria keretei között: a Ca gyakorisága megbecsülhető egy csillag légkörében. Mint a 10.3.5. ábrákból látszik, a H és K vonal az A színképosztályban igen erős. Mivel a fémek gyakorisága, mint azt a 10.4. szakaszban részletezni fogjuk, nem független egymástól, ez az adat arra is utalást ad, hogy körülbelül mennyi a többi fém gyakorisága, vagyis a globális fémtartalom. A fotometriával kapott különleges elemgyakoriságokat azonban mindig alá kell vetni spektroszkópiai ellenőrzésnek, mert nincs kölcsönös és egyértelmű kapcsolat a fotometriai eredmények és például az elemgyakoriságok között. A légkör szerkezete, a mikroturbulencia mértéke, és sok egyéb tényező egyaránt hatással lehet a színindexekre az elemgyakoriság mellett.

10.2.3. A csillagok fotometriai szögátmérője

Egy csillag luminozitása (2.47) szerint

$$L_x = 4\pi R^2 \mathcal{F}_x \quad (10.10)$$

ahol R a $\tau = 0$ optikai mélységhez tartozó sugár, mivel (4.20)-ban $\tau = 0$ az integrálás alsó határa. Ha (10.10)-ba beírjuk, hogy $\mathcal{F}_x(\tau = 0) = \pi F_x(\tau = 0) = aT_e^4$ a csillag teljes (bolometrikus) luminozitását kapjuk. Ha ismert a csillag fluxusa egy x (= például V stb) fotometriai sávban, ebben is kiszámíthatjuk csillagunk sugárzási teljesítményét. A csillagtól d távolságban levő Földnél, $X = 0$ levegőtömegnél a (10.10) luminozitás

$$L_x = 4\pi d^2 \mathcal{F}_x^{\text{megf}} 10^{A_x/2.5} \quad (10.11)$$

lesz, ahol $A_x (\geq 0)$ magnitúdóban mérve az intersztelláris extinkció, $\mathcal{F}_x^{\text{megf}}$ pedig a csillag megfigyelt fizikai fluxusa az x által szimbolizált hullámhossz intervallumban. (10.10) és 10.11) egyenlőségéből a csillag ϑ szögsugara adódik, ami természetesen a $\tau = 0$ optikai mélységhez tartozik:

$$\vartheta = \frac{R}{d} = \left[\frac{\mathcal{F}_x^{\text{megf}} 10^{A_x/2.5}}{\mathcal{F}_x(\tau = 0)} \right]^{1/2} \quad (10.12)$$

lesz, 2ϑ -t fotometriai szögátmérőnek is nevezzük. (10.12) radián egységekben adja meg ϑ -t, a szokásosabb mas (milliómásodperc) egységekbe az átszámítás nyilvánvaló, $1\text{mas} = 2\pi/1.296 \times 10^9 = 4.85 \times 10^{-9}$ radián.

A bolometrikus fluxus kiszámítása T_e birtokában könnyű, megfigyelése azonban nehéz, ezért gyakorlati szempontból hasznos áttérni egy, vagy több x fotometriai sávra (10.12) alkalmazásakor. Például az $UBV(RI)_C$ rendszerben a Vega 3. fejezetben ismertett abszolút kalibrációja alapján a megfigyelt és $X = 0$ -ra redukált magnitúdóiból egy csillag $\mathcal{F}_x^{\text{megf}}$, (például $x = V, R$) fluxusai megkaphatók, az A_x extinkció ismeretében pedig ϑ is.

Ha ismerjük csillagunk parallaxisát, vagyis d -t, az R sugarát megkapjuk fizikai egységekben. Ezt behelyettesítve $g = GM/R^2$ -be adódik csillagunk tömege is. Példa gyanánt megemlíjtük, hogy többszáz fehér törpe tömegét sikerült így megtudni, mivel ezek közeli csillagok, parallaxisuk jól ismert, és az extinkció is elhanyagolható feléjük. Érdekes eredmény az, hogy $\mathcal{M} = (0.58 \pm .10)\mathcal{M}_\odot$ a mintára, és ez két ma is megválaszolatlan kérdést vet föl.

- A fehér törpék a csillagfejlődés végállapotai $\approx 8\mathcal{M}_\odot$ -nél kisebb csilalogokra. Vajon milyen mecahnizmus tudja ilyen pontosan beállítani a fejlődés végtermékének a tömegét?
- A Sirius B, Procyon B, 40 Eri B közeli kettős rendszer tagjai, a Kepler-törvények alapján tömegük pontosan ismert, $\approx 1\mathcal{M}_\odot$. Vajon mi okozza az egyedülálló és a kettős rendszer tagja fehér törpék tömegének szignifikáns különbségét?

10.2.4. A vonalas színekép

Pár szót szólunk először a vonalas színeképekről általánosságban.

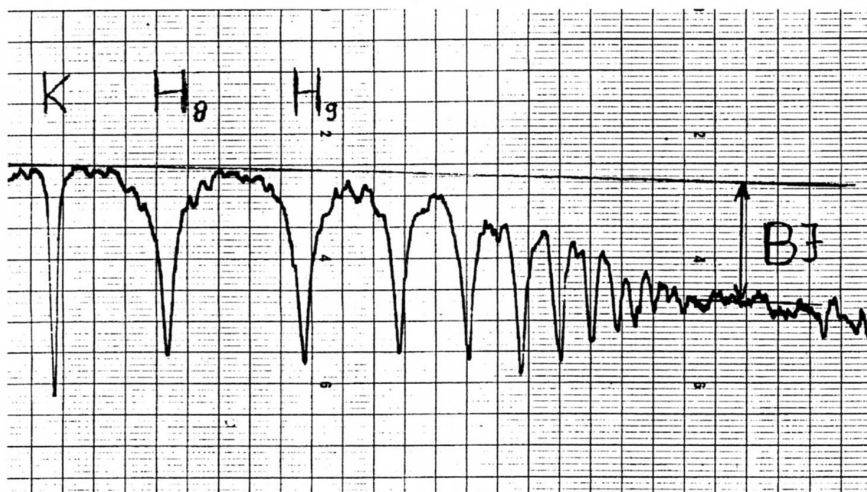
Mivel a csillagok túlnyomó többségének fő légköri összetevője a hidrogén, a látható tartományt a Balmer-vonalak és a Paschen-kontinuum uralják.⁵ A 3.2. ábrán láthatjuk a Vega, egy A színeképosztályba tartozó csillag fluxusát infravöröstől az ultraibolyáig, $\approx 10\text{\AA}$ feloldással. A csekély diszperzió ellenére is szembeszökőek a Balmer vonalak: $\lambda(\text{H}_\alpha) = 6562.82\text{\AA}$, $\lambda(\text{H}_\beta) = 4861.33\text{\AA}$, $\lambda(\text{H}_\gamma) = 4340.47\text{\AA}$, $\lambda(\text{H}_\delta) = 4101.74\text{\AA}$, valamint a $\lambda(\text{H}_\epsilon) = 3970.07\text{\AA}$ és a Ca II H vonalának ($\lambda = 3968.47\text{\AA}$ blendje. Szembeszökő továbbá a Balmer-ugrás $\lambda = 3646\text{\AA}$ -nél, és a Paschen-ugrás is kivehető $\lambda \approx 8200\text{\AA}$ -nél, valamint néhány Paschen-vonal a Paschen-ugrás infravörös oldalán.

A 10.3. ábra mutatja egy A csillag színeképét a Balmer-ugrás közelében. Hasonló ugrások vannak az extrém ultraibolyában és az infravörösben is: Lyman-ugrás, illetve Brackett- és Pfund-ugrás, stb. Továbbá az itt mondottaknak megfelelően az extrém ultraibolyában a Lyman-vonalak és a Balmer-kontinuum mellett a Lyman-kontinuum alakítja a színeképet, míg az infravörösben a Paschen-kontinuum és a Paschen-vonalak. Hidegebb csillagokban pedig igen jelentős a H^- ion kontinuum. Ennek az ionnak vonala nincs, mert jelenlegi tudomásunk szerint csak a szinglet és a triplet alapállapota kötött, de ezek között az optikai átmenet minden rendben tiltott. A szinglet alapállapot kötési energiája $0,75\text{eV}$, ezért a Balmer-ugráshoz hasonló abszorpciós küszöb körülbelül 16500\AA -nél van. Ennél nagyobb hullámhosszakon, tehát a távoli infravörösben fontos ez a kontinuum.⁶

Körülbelül 6000K a határ, ami fölött a semleges és ionizált fémek vonalai adják az egyéb vonalakat, alatta megjelennek a molekulaszávok is. $T_e > 10^4\text{K}$ fölött pedig már megjelennek a He vonalai, ami különben a csillaglégkörök második leggyakoribb összetevője. A 10.3-6. ábrák egy kis ízelítőt adnak a fémvonalak és a He vonalainak kinézetéről A, B csillagok színeképében. A vonalak azonosítása a Charlotte E. Moore által szerkesztett A Multiplet Table of Astrophysical Interest (Contributions from the Princeton University Observatory No. 20, 1945) táblázattal történt. Ez a normálösszetételű csillagok látható színeképében előforduló vonalak összességét tartalmazza. A vonalak jelölése az ábrákon: először a kémiai elem vegyjele, utána római számmal az, hogy hányadik spektrumából ered a vonal, majd a Moore-féle multiplétszám. A 10.5. ábrán a hullámhossz is szerepel \AA egységekben, valamint a vonal intenzitása a Moore-táblázat empirikus intenzitáskáláján.

⁵A kontinuumok k-sz és sz-sz átmentekből keletkeznek. A k-sz kontinuumok mindig egy határozott hullámhossznál kezdődnek, $\kappa_\nu \propto \nu^{-3}$ csökkenés jellemző a hidrogénszerű ionokra.

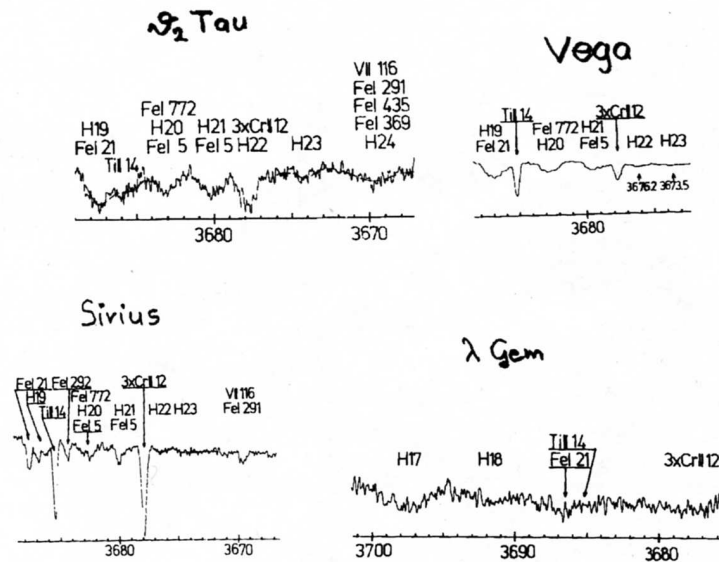
⁶Ezt az iont eredetileg kvantummechanikai számítással fedezte fel 1938-ban R. Wildt, majd sikerült a Nap színeképében is megtalálni a hatását. Laboratóriumban csak jóval később sikerült előállítani.



10.3.ábra. A Balmer-ugrás (BJ) környéke. A függőleges tengelyen F_λ van önkényes egységekben. A vízszintes tengelyen jobbra csökken a hullámhossz, a Balmer-sorozat tagjai összeolvadnak még 3646 Å, — \uparrow BJ-től balra, — a (6.2) alapján várható küszöb előtt. H_{17} -ig — $n = 17$ (6.2)-ben — vehető ki a Balmer-vonalak magja, $H_8 (= H_\zeta, \lambda = 3889.05 \text{ \AA})$ és \uparrow között tulajdonképpen egy pseudo-kontinuum van, ami a Paschen-kontinuum és az egymásra torlódott Balmer-vonalak szárnyának eredője. A H_{17} -en túli tagjai a Balmer-sorozatnak azért nem tudnak kialakulni, mert $r_{17} \approx 1,53 \times 10^{-6} \text{ cm} = 17^2 a_0$ távolságban már nem a proton tiszta Coulomb-potenciálja érvényesül, hanem ehelyett valami bonyolult elektromos mikrotér van, amint azt a 6.1.2. szakaszban említettük.

A 3646 Å-nél rövidebb hullámhosszakon a monokromatikus abszorpciós koefficiensbe belépnek már az $n = 2$ főkvantumszámú állapotokból származó k -sz átmenetek is, a Balmer-kontinuum. Mivel κ_ν megnövekedett, a légkör kisebb x geometriai mélységeibe látunk bele e hullámhosszakon. A plazma átlaghőmérséklete itt kevesebb, ezért a kisebb fluxus. Szokás a Balmer-ugrást magnitúdóban is megadni, az extrapolált Paschen-kontinuum — felső vonal, $F_{3646 \text{ \AA}}^{\text{ext}}$ — és $F_{3646 \text{ \AA}}$ alapján; $\Delta m = 2,5 \log F_{3646 \text{ \AA}}^{\text{ext}} / F_{3646 \text{ \AA}}$. A0 csillagokban 1,5 magnitúdó is lehet. Forróbb csillagokban azért kevesebb, mert az $n = 2$ nívó depopulálódik, hidegebbekben pedig azért, mert kevés az ionizáló ultraibolya foton. Fehér törpe csillagokban is $\Delta m \geq 0^m$ körül szór a Balmer-ugrás nagysága, amitől e csillagok U fényessége nagy, az $U - B$ színindexe pedig -1^m körül van.

Szembeeszkő továbbá a Ca II K ($\lambda = 3933.66 \text{ \AA}$) vonalának keskeny volta a Balmer-vonalakkal szemben. E különbség oka az, hogy a K vonal a kvadratus Stark-effektusra érzékeny, míg a Balmer-vonalak a lineáris Stark-effektusra.



10.4. ábra. A Balmer-sorozat összeolvadásának környéke néhány A csillagban. A függőleges tengelyen F_λ van önkényes egységekben, a vízszintes tengelyen λ Å egységekben. Mindegyik felvételen látszanak blend-ek, tehát amikor több, az adott spektrális feloldás mellett nem elkülöníthető elem vonala együtt hoz létre egy összetett vonalat. Néhány szembeeszkő jellegzetesség még e színképekről.

- A θ_2 Tau szubóriás, tehát a HRD fősorozata fölött helyezkedik el. Az ilyen csillagok éghőre hígabb, mint a fősorozati csillagoké, ezért látunk rajta több Balmer-vonalat; a H_{23} még határozottan kivehető, míg a normál fősorozati Siriusban ez alig látszik.
- A λ Gem nagy rotációs sebessége miatt — $v_{\text{eq}} \sin i \approx 150 \text{ km/s}$ — a vonalprofilok szélesek és laposak, a gyenge vonalak pedig szinte egybeolvadnak egy pseudo-kontinuummá, mint például a 3 darab Cr II 12 vonal.
- A Sirius mérsékelten fémgazdag a Vegához képest, ezért fémvonalai erősebbek is.
- A Vega $v_{\text{eq}} \sin i$ értéke mindössze néhány km/s, de ez azért van, mert majdnem a pólusára látunk rá, tehát i kicsi, de a v_{eq} egyenlítői sebessége igen nagy, talán meghaladja a 200 km/s-ot is, ezért a csillag forgási lapultsága jelentős. Emiatt a Ti II 14, a Cr II 12 vonalak, s persze a többi fémvonal is a vonal centrumában lapos, nem olyan hegyes, mint a Sirius fémvonalai.

10.3. Növekedési görbék, színeképek finom analízise

Mint már említettük, a szakirodalomban szoktak beszélni színeképek finom analíziséről, illetve spektrumszintézisről, a csillagszíneképek értelmezésében ma ez jelenti a csúcst. Mindkét kifejezés alatt azt értjük, hogy a légkörmodellnek a 7. fejezetben megismert paramétereit addig változtatjuk, míg a modellhez tartozó számított $F_\nu(0)$ fluxus és a megfigyelt színekép jó egyezésbe nem kerül egy bizonyos frekvenciatartományon belül. Több lépcsőben lehet elvégezni ezt a bonyolult munkát, tehát tulajdonképpen szukszcссив approximációról van szó. Először a folytonos színeképet vesszük szemügyre: szélessávú fotometriával megbecsüljük T_e , $\log g$ közelítő értékét, majd ha van ilyen, közepes sáv szélességű (rendszerint Strömgen-) fotometriával finomítjuk ezeket az értékeket, s megbecsüljük az $[M]$ "fémességet", ami alatt asztrofizikai szóhasználatban a héliumnál nehezebb kémiai elemek koncentrációját értjük. A következő lépés a vonalak azonosítása és ekvivalens szélességük meghatározása. Egy multiplett (=vonalcsoport) összes vonalát meg kell találni ahhoz, hogy megnyugtatóan kijelenthessük, a vonalak tényleg a kérdéses elemhez tartoznak. (Természetesen tekintettel kell lenni a multiplett tagjainak rendszerint táblázatosan megadott relatív intenzitására is!) Mivel a (8.57) monokromatikus abszorpciós koefficiens egy Boltzmann-faktort is tartalmaz, egy vonal vagy multiplett hiánya nem feltétlenül jelenti a hozzá tartozó kémiai elem hiányát is a vizsgált csillag légkörében, a vonalak hiányozhatnak a keletkezésükhöz kedvezőtlen hőmérsékleti viszonyok miatt is.

Az abszorpciós és esetleges emissziós vonalak azonosítása után meghatározzuk a vonal mennyiségi jellemzőit: az ekvivalens szélességet és a vonalprofil. Egy vonal ekvivalens szélessége alatt a következőt értjük: kiszámítjuk $F_\lambda^{(c)}(0)$ -t (4.20) szerint úgy, hogy κ_λ -ba csak a sz-sz, k-sz átmenetek monokromatikus abszorpciós koefficiensét vesszük be, majd megtesszük ugyanezt a vonal bevonásával is, az eredmény legyen $F_\lambda^{(c+l)}(0)$. Képezzük ezután a

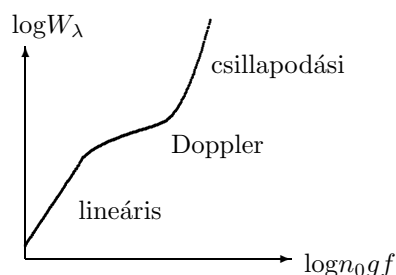
$$W_\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{|F_\lambda^{(c)}(0) - F_\lambda^{(c+l)}(0)|}{F_\lambda^{(c)}(0)} d\lambda \quad (10.13)$$

hossz dimenziójú integrált a vonal (λ_1, λ_2) tartományára, ez abszorpciós vonal esetén éppen a vonal által a kontinuumból kitakart felület, amint azt a 3.6. ábra mutatja. Egy spektrográfból származó intenzitogrammon természetesen $F_\lambda^{(c)}(0)$ -t a környező kontinuumból kell extrapolálnunk, $F_\lambda^{(c+l)}(0)$ pedig közvetlenül leolvasható. Eddigi ismereteink alapján szemléletünk rögtön súgja, hogy W_λ a sugárzó atomok n_j számától függ, ami a hőmérsékleten és az elektronnyomáson kívül a vonalat adó kémiai elem n_0 légköri koncentrációjától függ. W_λ széles körben elterjed egysége a $\text{m}\text{\AA}$, a leggyengébb optikai vonalak ekvivalens szélessége $10 \text{ m}\text{\AA}$ nagyságrendjébe esik, míg a legerősebb vonalaké 10\AA is lehet.

Meg lehet szerkeszteni egy-egy modellre (egy-egy rögzített T_e -hez, $\log g$ -hez, kémiai összetételhez, a (7.38)-ben szereplő ξ_t -hez, s esetleg egyéb fontosnak látszó

paraméterhez) a $W_\lambda - n_0 g_j f_{jm}$ diagramot, amelyben a különböző elemek n_0 -ja a légkör egy azonos (de egyébként tetszőleges) mélységében értendő. Az így kapott görbét növekedési görbének hívjuk, általános alakja a 10.6. ábrán látható. Három világosan elkülönülő szakasza van:

- először van a lineáris szakasz, ide esnek a gyenge színeképvonalak, ha ezt használjuk n_0 meghatározására, a hiba fő forrása $g_j f_{jm}$ pontatlan ismerete,
- utána következik a Doppler-szakasz, amelyben a fő kiszélesítő mechanizmus a Doppler-effektus, n_0 meghatározására nézve itt a hibaforrást a nem termikus mozgások jelentik, amit mikroturbulenciának (ξ_t) is szoktak nevezni, amint azt (7.30) kapcsán tárgyaltuk. A mikroturbulencia bevezetésével a különböző kémiai elemek vonalaiból meghatározott n_0 értékek szórását sikerült csökkenteni, illetve n_0 szisztematikus menetét W_λ növekedésével eltávolítani.
- Végül következik a csillapodási szakasz, amelyet a nyomási vonalkiszélesedés ural. Innen meghatározott n_0 -k fő hibaforrása a vonalkiszélesedés pontatlan ismerete, olyan effektusok fellépése, amelyeket a 9. fejezetben nem tárgyaltunk. Csak egy példát ragadunk ki: a sugárzó atomot leginkább megközelítő perturbáló részecskék az elektronok a nagy mozgékonyáguk miatt. Amikor egy ilyen közeli elrepülés létrejön, egy rövid időre a "legközelebbi szomszéd" hatása okozza szinte teljes mértékben ω_{jm} eltolódását, s (9.26)-ben sem lehet az első tagra szorítkozni. Jegyzetünk kereteit meghaladó munkával ki lehet mutatni, hogy ilyenkor a Lorentz-profilról eltérő profilt lehet kapni, de az effektus kvantitatív tárgyalása mind a mai napig nem tekinthető az elméleti asztrofizika lezárt kérdésének.



10.6. ábra. A növekedési görbe különböző szakaszai.

A növekedési görbék használatával a különböző színeképvonalakból meg lehet határozni a csillagunk légkörének kémiai összetételét. Minden egyes színeképvonalból származik egy n_0 . Mivel n_0 egy barometrikus formula szerint változik a légkörön belül bevezetjük ϵ -t, amit asztrofizikában használnak széles körben, mert ez az elemgyakoriságot a légkörbeli mélységtől függetlenül jellemzi. Definíciója a következő: vegyünk egy önkényes térfogategységet úgy, hogy abban 10^{12} darab hidrogénatom van, e térfogategység nyilván különböző nagyságú lesz τ függvényében. E térfogategységben

levő atomfajta számának logaritmusát nevezzük ϵ -nak, tehát definíció szerint $\epsilon(H) = 12$. A szakirodalomban látható növekedési görbék vízszintes tengelyén ϵ szokott inkább szerepelni.

Természetesen a különböző elemek növekedési görbékből származó ϵ -jai szórását fognak mutatni, amit a továbbiakban minimalizálni szeretnénk. Erre szolgál a vonalprofilok analizálása (számítása és összevetése a megfigyelttel). Ehhez már igen pontos $P(\omega)$ vonalprofilokra van szükségünk, vagyis részletes monokromatikus szórás hatáskeresztmetszetekre ω_{jm} környezetében, amelyek természetesen τ -tól is függenek. E területen a számos létező problémába nem megyünk bele, azt azonban meg kell jegyeznünk, hogy a leggondosabb analízisek T_e -t 1–2% pontosan tudják meghatározni, lgg -t 0,05, ϵ -t pedig 0,3 pontosan - ez n_0 -ban kettes faktor! (Mindazonáltal e kettes faktor egyáltalán nem elkésérítő, hiszen ez olyan elemekre vonatkozik, amelyek egymáshoz képesti koncentrációja akár 10 nagyságrendet is eltér.)

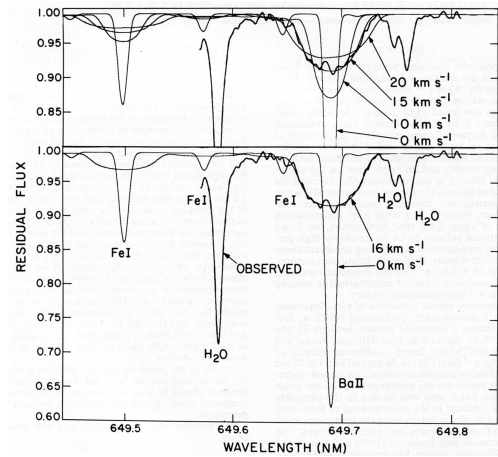
Ha már megvan egy elem gyakorisága, a növekedési görbék használhatók az elemnek a színekben föllelhető egyéb vonalaihoz tartozó $g_j f_{jm}$ értékek meghatározására vagy ellenőrzésére. Csak érdekességként említjük meg, hogy a 1960-as években a Nap színeképeinek analizálásával sikerült kimutatni, hogy a semleges vas számos vonalához tartozó f_{jm} érték, amit laboratóriumban mértek meg, átlagosan 1 nagyságrenddel nagyobb volt annál az értéknél, ami a szoláris vonalokból adódott. A hiba felfedezése után sikerült kinyomozni, hogy a laboratóriumi mérések során a plazma hőmérsékletét hibásan határozták meg, s ez okozta a diszkrepanciát!

A növekedési görbéekkel elvégezhető analízis után következhet a finom analízis, amikor egyes vonalak számított és mért $F_\lambda(0)$ profilját hasonlítjuk össze, itt a cél nem mindig az elemgyakoriság finomítása, hanem például vonalkiszélesedési elméletek tesztelése is lehet. Már a növekedési görbékhez is, de a finom analízishez különösen a (6.7) Schwarzschild-féle integrodifferenciál-egyenletet kell megoldani a vonal hullámhossz-tartományában. Előfordul a szakirodalomban, hogy a különféle paraméterek függvényében a vonalprofil változását is növekedési görbének nevezik, például azt, ahogy mélyül egy vonal centruma, terebélyesedik a szárnya a növekvő ϵ vagy f_{jm} függvényében.

Megemlítettük, hogy $F_\nu(0)$ additív mennyiség, ez akkor fontos, ha például spektrográfunk több csillag színeképet képezi le egy helyre. Ily módon távoli gömbhalmozok vagy galaxisok színeképet is ki tudjuk számítani egyszerű összegzéssel a bennük lévő csillagok stb. színekéből, és így vizsgálhatóvá válik például olyan kérdés, hogy e távoli, csillagokra fel nem oldható égitestek mutatnak-e például olyasmi fejlődési effektusokat, hogy a távoli múltban a galaxisokban tényleg csak fiatal csillagok vannak, vagy netán a távoli galaxisok csillagainak légköre más kémiai összetételű anyagból áll.

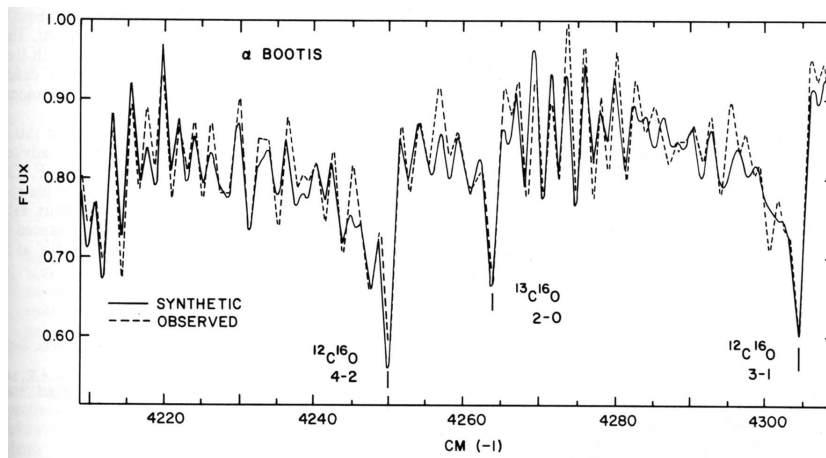
Néhány példán bemutatunk finom analízissel nyerhető információkat.

10.3.1. Rotáció hatása a vonalprofilra



A Sirius színekének egy szelete, jól látszik, hogy $v_{\text{eq}} \text{Sirius} = 16 \text{ km s}^{-1}$.⁷

10.3.2. A C^{12}/C^{13} arány az Arcturus légkörében

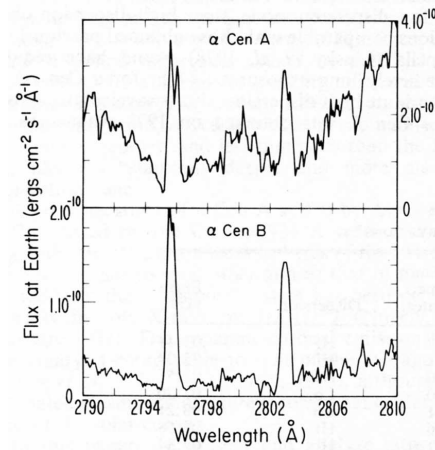


Az Arcturus színekének egy szelete. A szaggatott vonal a megfigyelt színek, a kihúzott vonal a számított $C^{12}/C^{13} \approx 10$ arány feltevésével. A CNO ciklus ezt az arányt ≈ 4 -re állítaná be, tehát az Arcturus légkörének anyaga nem ment át CNO cikluson.⁸

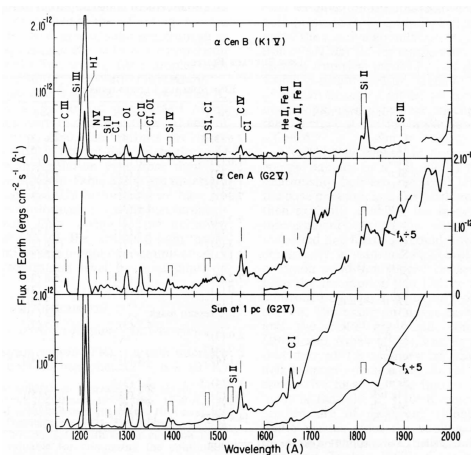
⁷Forrás: ApJ 217, 771, 1977

⁸Forrás: ApJ 217, 771, 1977

10.3.3. Kromoszférikus vonalak a Toliman ultraibolya színekében



A Mg II h és k vonala az α Cen A és B színekében. Ez a két vonal a Ca II H és K vonal megfelelője.⁹



Az α Cen A és B ultraibolya színeképe, összehasonlítással alul a Napé. Az ultraibolya emissziós vonalak kromoszférikus aktivitás jelei.¹⁰

⁹Forrás: ApJ 235, 76, 1980

¹⁰Forrás: ApJ 235, 76, 1980

10.4. Kozmikus elemgyakoriságok

Ahogy elkezdtek szaporodni a kvantitatív spektrálanalízisek az 1940-es évek után, meglepő szabályosság derült ki a Tejútrendszer csillagaira: szinte az összes analizált csillagra, amelyekben T_e akkora volt, hogy a hélium vonalai láthatók voltak, $\epsilon(\text{He}) \approx 11$ adódott. A fémességre (=minden héliumnál nehezebb elem gyakoriságára) pedig az adódott, hogy egymáshoz képesti gyakoriságaik a meghatározás hibahatárán belül azonos volt, például $\epsilon(\text{C}) \approx 8,5$, $\epsilon(\text{N}) \approx 8,5$, $\epsilon(\text{O}) \approx 9$, $\epsilon(\text{Ne}) \approx 8$, $\epsilon(\text{Na}) \approx 6$, $\epsilon(\text{Fe}) \approx 7,6$ és így tovább. Ezt az összetételt el is nevezték normál összetételnek, mert — mint később kiderült — ez a tipikus összetétel I. populációs csillagok légkörében, de ha leszámítjuk a könnyen illó elemeket, a földkéreg összetételében is hasonló arányokat találunk. Etalonja például a Nap légkörének kémiai összetétele, ezt a 10.1. táblázatban láthatjuk.

A II. populációs csillagok egyre nagyobb számú analizálásával a következőképpen módosult a kép. A hidrogén és a hélium aránya mindegyik populációban azonos, atomszám szerint 10:1, tehát $\epsilon(\text{He}) \approx 11$ itt is, de a fémesség egységesen kevesebb, néha több, úgy hogy nehezebb elemek egymáshoz képesti gyakorisága azonban azonos. Mintha két tömlőben lett volna a csillagok ősanyaga, az egyikben a H és a He atomszám szerint 10:1 arányban némi D, T, Li B, Be társaságában, míg a másikban a C, N, O stb. lett volna. Mintha valahogy a nehezebb elemeket tartalmazó tömlőből egységesen több vagy kevesebb keveredett volna az I. és a II. populációs csillagokhoz. Kémiai összetétel szerint tehát nem válik szét olyan jól az I. és a II. populáció, mint kinematikailag, vannak olyan II. populációs csillagok, amelyeknek légkörében az elemgyakoriságok megegyeznek a szoláris értékekkel.

Az univerzálisnak mondott H/He arány, továbbá az, hogy ennyi hélium az Univerzum $O(10^{10})$ éves kora alatt a csillagok belsejében magreakciókkal nem keletkezhetett komoly érv volt az ősrobbanásos világegyetemesi modell mellett. Magreakciókkal azért nem jöhetett létre ennyi He, mert ez azzal járt volna, hogy a múltban a galaxisok sokkal fényesebbek lettek volna, ami ellentmond a megfigyelési eredményeknek. Ugyanakkor ne felejtjük el, hogy az "univerzális" arány a csillagok összanyagának kevesebb, mint 10^{-11} -ed része. Másik magfizikai vonatkozása az ősrobbanásos modelleknek, hogy az ősrobbanásban bórnál nehezebb elemek nem keletkeznek. Viszont azt a hipotetikus III. (csillag)populációt, amely az ősrobbanás utáni, csupán hidrogént, héliumot, némi deutériumot, bórt, berilliumot, lítiumot tartalmazó anyagból először alakult volna ki, több évtizedre kiterjedő intenzív kutatómunkával sem sikerült megtalálni. Ha volt ilyen ősi csillaggeneráció, annak kis tömegű tagjai ma is megvolnának, légkörük pedig megőrizte volna a primordiális anyagot, amelyből a csillagok e generációja kialakult.

Gyakran szoktak a szakirodalomban összevontan fémességről beszélni, s ezt $[M]$ -mel, illetve $[\text{Fe}/\text{H}]$ -val szokták jelölni. Ez alatt azt értik, hogy a normál "fémesség" a Nap légkörének összetétele, erre $[M] = [\text{Fe}/\text{H}] = 0$, ha ez a szám negatív, fémhiányról beszélnek, ez nem ritka, ha pozitív, fémtöbbletről beszélhetnénk, de $[M] > 0,5$ alig ismert. Ez a szám is logaritmikus skálán értendő, $[\text{Fe}/\text{H}] = -2$ azt je-

10.1. táblázat. A Nap légkörének kémiai összetétele

H								He		
12.0								10.84		
Li	Be			B	C	N	O	F	Ne	
3.36	1.66			2.53	8.63	7.94	8.84	4.47	7.99	
Na	Mg			Al	Si	P	S	Cl	Ar	
6.36	7.61			6.51	7.58	5.39	7.28	5.26	6.61	
K	Ca	*			Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
6.36	7.61				3.15	3.64	2.37	3.40	2.54	3.19
Rb	Sr	**			In	Sn	Sb	Te	J	Xe
2.36	2.93				0.85	2.14	1.07	2.39	1.68	2.34
Cs	Ba	***			Tl	Pb	Bi	Po	As	Rn
1.17	2.26				0.85	1.99	0.72	-	-	-
Fr	Ra	****								
-	-									
* Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	
3.07	4.96	3.98	5.68	5.55	7.53	4.92	6.26	4.31	4.68	
** Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pa	Ag	Cd	
2.26	2.65	1.53	2.18	-	1.85	1.18	1.69	1.54	1.77	
*** La	Ce	Pr	Nd	Pr	Sm	Eu	Ga	Tb	Dy	
1.14	1.65	0.83	1.87	-	0.96	0.55	1.20	0.46	1.14	
					Ho	Er	Tm	Yb	Lu	
					0.54	0.94	0.12	0.88	0.12	
	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	
	0.81	-0.12	1.05	0.28	1.41	1.43	1.72	0.90	0.90	
	****	Th	U							
		0.23	0.01							

Forrás: Essays in Nuclear Physics, 1982, Cambridge Univ. Press, New York

lenti, hogy az adott összetétel a Nap légköréhez képest százszoros fémhíányt mutat, tehát bele a "fémeket" tartalmazó tömlőből csak századannyi anyag jutott, mint a Nap anyagába. Ugyan síkos a terület, de sok kísérlet történik arra, hogy az [Fe/H]-t nem színképelemzésből, hanem a jóval egyszerűbb fotometriai sajátosságokból határozzák meg nagyszámú csillagra. Ilyen módszerekkel a gond az, hogy a fotometriai sajátosságok és a kémiai elemgyakoriságok, esetleg egyéb légköri paraméterek között nem kölcsönös és egyértelmű a kapcsolat. Végezetül megjegyezzük, hogy a [Fe/H] szám nagyjából tájékozódásra használható, akár fotometriai kalibrációk alapján is, s az 1990-es években a rekordot a fémhíányban [Fe/H] $\approx -4,5$ jelentette, tehát a legfémszegényebb és legősibb csillagokban is előfordulnak olyan nehéz elemek, amelyek az ősrobbanásban nem keletkezhettek. (Azóta ≈ -6 -ig tolódott ez az érték, vagyis nehéz elemek igenis minden csillag légkörében vannak.)

10.4.1. Anomális légköri elemgyakoriságok

Az analízisek során találtak olyan összetételeket is, amelyek gyökeresen eltérnek az előbb vázolttól. Bizonyos esetekben értjük az eltérések okát, de van, amikor egyáltalán nem.

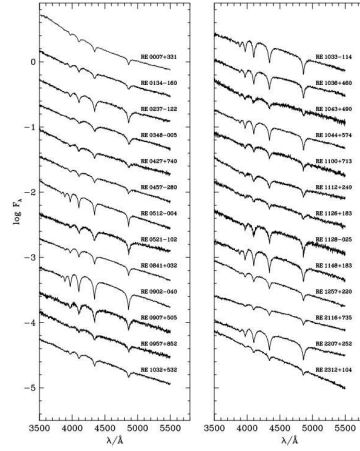
Fehér törpék

Légkörük különleges elemgyakoriságaival tűnnek ki a fehér törpék, túlnyomó többségük a DA osztályba tartozik: színképükben csak a Balmer-vonalak látszanak. Mivel a fehér törpék a csillagfejlődés végállapotai sokáig rejtélyesnek tűnt, hogy miért csak a csillagfejlődés nyersanyagának, a hidrogénnek vonalait látjuk színképükben.

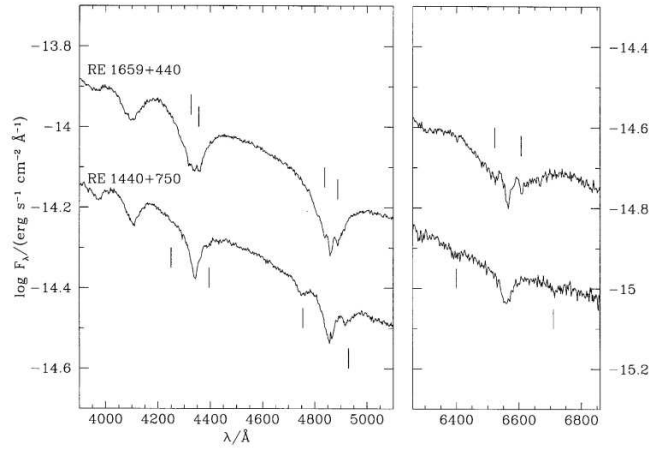
A válasz: a nagy felszíni nehézségi gyorsulás – $O(g) \approx 10^8 \text{cms}^{-2}$ – miatt a nehezebb elemek gravitációs differenciációval leülepszene, konvekció nincs, a légkör sugárzási egyensúlyban van, ezért marad legfölül a legkönnyebb elem, a hidrogén. Ez a tisztán hidrogénből álló héj ugyan töredéke ($< 10^{-15}$ -ed része) a csillag össztömegének, de optikailag már vastag, és ezért nem látjuk alatta a nehezebb elemeket, amelyek különben szintén sűrűség szerint héjakba rendeződnek.

Kisebb arányban ugyan, de vannak DB, DC fehér törpék, amelyekre az jellemző, hogy a He, C vonalai látszanak. Ezek magyarázatát szintén a gravitációs differenciációban kell keresni. A DB csillagok elődei valószínűleg ledobták a fejlődésük során a hidrogént is tartalmazó külső burkukat, s most magreakciókon átment anyagot látunk a légkörükben. A DC csillagok pedig a héliumot tartalmazó burkukat is levetették, maradt tehát a szén a légkörük anyagának.

Hogy ne legyen teljesen tiszta ez az egyszerű magyarázat meg kell említeni, hogy vannak DAB fehér törpék is, amelyek színképe a H és He vonalaiból áll. Ismert továbbá néhány DZ fehér törpe is, amelyeknek légköre nehezebb elemekből áll, akár a normál (szoláris) összetételhez hasonló. Ez utóbbiakra a legvalószínűbb magyarázatnak az akkréciót tartják a körülöttük feltételezett, talán planetezimálisokat is rejtő korongból.



Fehér törpe csillagok színképe. A H_β - $H\epsilon$ vonalak jól kivehetők, tőlük balra, az ultraibolya felé a Balmer-pszedudokontinuum látható, és a Balmer-ugrás szinte nem is látható¹¹



A RE 1659+440 és RE 1440+750 Fehér törpe csillagok színképe a H_β - $H\gamma$ vonalak környékén. Jól láthatók a Zeeman-effektus következtében több komponensre felhasadt vonalak. A légköri mágneses télerősség $H = 3.5 \times 10^6$ G, illetve $H = 8 \times 10^6$ G.¹²

¹¹Forrás: ApJ 235, 76, 1980

¹²Forrás: ApJ 235, 76, 1980

C_p csillagok

A "chemically peculiar" angol gyűjtőfogalom nyomán újabban gyakori a C_p elnevezés azokra a különleges elemgyakoriságú csillagokra amelyek légkörének összetétele jelentősen eltér a normális (szoláris) összetételtől. Eleinte csak az A_p , A_m csillagokat sorolták ide, közös jellemzőjük, hogy bizonyos fémvonalaik igen erősek. Attól függően, hogy melyek, több csoportba oszthatók. Ritka földfémek (akár például holmium, európium stb.), de akár foszfor stb. gyakorisága több nagyságrenddel nagyobb, mint a szoláris érték

A gravitációs differenciáció, a teljesen blokkolt konvekció mellett a diffúzió jön komolyan számba az anomáliák magyarázatára. Ezeknek a csillagoknak a légköre feltehetőleg nagyon szigorú sugárzási egyensúlyban van, semmi mozgás nincs benne a hőmozgáson kívül. Ezeket a magyarázatokat megkérdőjelezte az, hogy több C_p csillagnál nemradiális pulzációt sikerült kimutatni, ami a légkört nyilván átkeveri.

Érdeemes megemlíteni, hogy bizonyos csillagok színképében rövid felezési idejű radioaktív elemek (Tc, Pm) vonalait sikerült azonosítani. A légköri sűrűségeken és hőmérsékleteken magreakciók ki vannak zárva, valahogy a radioaktív elemeknek a mélyből kellene jönniük. Olyan mechanizmus egyelőre nem ismert, ami ezt meg tudná tenni.

He és C csillagok

A He és C csillagok esetében valószínűleg elveszítette a csillag a külső burkát, ezért légkörüket magreakciókon átment anyag alkotja.

Tc az S csillagok légkörében

Az S csillagok színképében az instabil Tc színképének jelenléte magreakciókra utal, de meg kell jegyeznünk, hogy a mai csillagmodellek alapján nem értjük, hogyan kerülhet a csillag légkörébe instabil radioaktív elem, s ez miért éppen csak az S csillagoknál következik be.

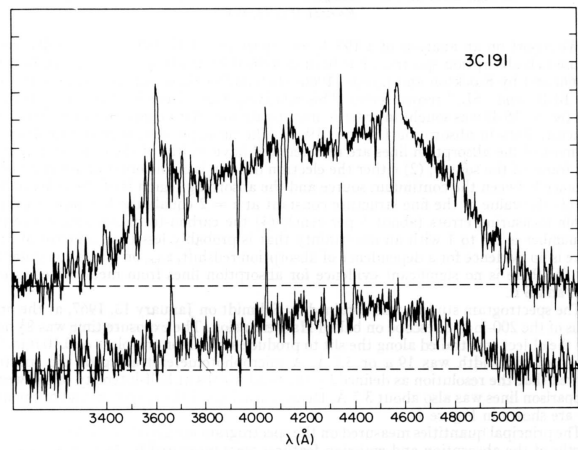
10.4.2. Kvazárok színképe

A kvazárok színképének létrejöttére csak nagyon közelítő modellek, elképzelések vannak. Közös bennük, hogy a Doppler kiszélesedés bizonyosan nagy szerepet játszik, és erősen NLTE körülményeket kell feltételezni nagyon híg plazmában.

Erős emissziós vonalak uralják a színképet, amelyek körül "abszorpciós erdők" találhatóak, utalva arra, hogy a különböző sötét felhőkön is átmegy a forrás sugárzása. Szemléltetésül álljon itt a 3C 48 és 3C 191 felfedezéskori színképe. A 10.2 táblázatból látszik, hogy a C és a Si II. és IV. színképéből egyaránt vannak vonalak, ez azt mutatja, hogy a színképek NLTE körülmények között keletkeztek, vagyis az ionizációs fokok betöltési számait (számsűrűségét) a Saha-egyenlet nem adja meg.

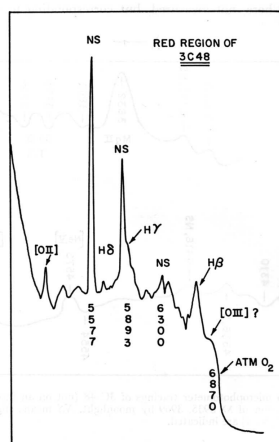
10.2. táblázat. A 3C 191 néhány színekvonalának adatai

λ	ion	λ_0	z
emissziós vonalak			
3591.6	Ly_α	1215.7	1.9543
4583.3	C IV	1549.1	1.9587
abszorpciós vonalak			
3506.2	Si II	1190.4	1.9454
3519.1	Si II	1194.2	1.9468
3932.1	C II	1335.3	1.9447
4106.2	Si IV	1393.7	1.9463
4132.9	Si IV	1402.7	1.9464
4559.6	C IV	1548.2	1.9451
4569.1	C IV	1550.8	1.9463



A 3C 191 színekpe a felső görbe, az alsó pedig az égi háttéré.¹³

¹³Forrás: ApJ 149, L12, 1967

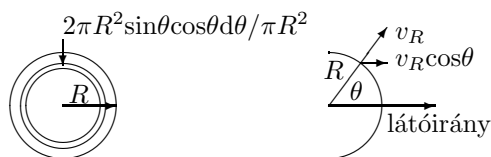


A 3C 48 színeképe. NS=night sky jelzi az égi háttérből származó vonalakat. A $H_\beta, H_\gamma, H_\delta$ vonal jól kivehető, $z = 0.367$.¹⁴

10.5. Pulzáló csillagok távolsága

10.5.1. A Baade–Wesselink-módszer

Gömbszimmetrikusan pulzáló csillagok megfigyelt $v_{\text{rad}}(t)$ radiális sebességéből a pulzáció $v_R(t)$ sebességét úgy hámozhatjuk ki, ha $v_R(t)$ "peremsötétedését" is figyelembe vesszük. A problémát az alábbi leegyszerűsített modell világítja meg.



10.7. ábra

Ha a csillag légkörének vastagsága elhanyagolható, s egyenletesen mozog minden optikai mélységben (vagyis pulzáló léggömbnek tekinthető), akkor az $R(t)$ sugarú $v_R(t)$ sebességgel gömbszimmetrikusan pulzáló csillag pulzációs mozgásból származó radiális sebessége $v_R(t) \cos\theta$ lesz, amelynek súlya $2\pi R \sin\theta d(R \sin\theta) / \pi R^2$. (A ϕ azimuttszögre rögtön integráltunk, innen a 2π a számlálóban.) Ezután in-

¹⁴Forrás: ApJ 140, 1, 1964

tegrálva a polárszögre kapjuk, hogy a megfigyelt radiális sebesség

$$v_{\text{rad}}(t) = v_{\gamma} - \int_0^{\pi/2} 2v_R(t)\cos\theta\sin\theta\cos\theta d\theta = v_{\gamma} - \frac{2}{3}v_R(t), \quad (10.14)$$

ahol v_{γ} a csillag súlypontjának (vagyis a 10.7. ábra origójának) a radiális sebessége. (Az integrál azért szerepel – előjellel, mert konvenció szerint a radiális sebesség akkor negatív, ha közeledik felénk a mozgó test, és ugyanez a konvenció v_{γ} előjelére is, míg $v_R(t) = \dot{R}$ akkor negatív, ha összehúzódik a csillag, vagyis felülete távolodik tőlünk.) Ezen az alapon a

$$v_R(t) = p[v_{\gamma} - v_{\text{rad}}(t)] \quad (10.15)$$

összefüggést jogosan tételezhetjük fel, p a projekciós faktor, ebben a modellben $p = [2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta]^{-1} = 3/2$ lett. Ha a szürke modellünkben v_R minden τ optikai mélységben azonos az iménti átlagolás $p = 24/17$ -re vezet, reálisabb modellekben pedig p ennél is kevesebb egy kicsit, 1,3–1,35 közé esik. A csillag változó sugara

$$R(t) = R(t_0) + \Delta R(t) = R(t_0) + p \left[v_{\gamma}(t - t_0) - \int_{t_0}^t v_{\text{rad}}(t') dt' \right] \quad (10.16)$$

lesz. Itt föl kell hívni a figyelmet arra, hogy a (10.16) a valóság nagyon erős egyszerűsítését jelenti a következő két okból.

- Az egyetlen R paraméter jellemzi a légkör méretét, ennek idő szerinti differenciálhányadosa pedig a sebességét, holott a légkör RR Lyrae csillagoknál $O(10^4)$, δ Cep csillagonál $O(10^6)$ km karakterisztikus méretű kompresszibilis plazmahéj.
- Ezenkívül a konverzióhoz nagyon pontosan kell ismerni v_{γ} -t: a $\Delta v_{\gamma}(t - t_0) \ll |\int_{t_0}^t v_{\text{rad}}(t') dt'|$ feltételnek kell fennállni, ahol Δv_{γ} a csillag súlypontja radiális sebességének észlelési hibája.

A kapott (10.16) sugárváltozást tudjuk használni pulzáló csillagok távolságának meghatározására, ha megfigyelésekből kiszámítottuk az $\mathcal{F}_x^{\text{megf}}(t)$ fluxust, és vannak olyan légkörmodelljeink, amelyek megadják $\mathcal{F}_x(t)$ -t. Ezeket és a (10.16) sugárváltozást behelyettesítve (10.12)-ba megkapjuk a $\vartheta(t)$ szögsugar időbeli változását. Mivel $R(t)$ abszolút egységekben szerepel (10.16)-ben a d távolságot is megkapjuk szintén abszolút egységekben ha legalább két t időpontra fel tudtuk írni (10.12)-t és (10.16)-t.

A módszer alkalmazásának részleteiben nem egységes a szakirodalom, de itt feladatunk csak a módszer bemutatása volt. A komplikációt okozó faktorok vázlatosan.

- Bizonyos fázisokban bonyolult légköri mozgások vannak, ezekben dinamikus légkörmodellekből kellene kiszámítani a fluxust, ilyenek azonban alig léteznek.

Ezt a nehézséget úgy lehet kikerülni, hogy csak azokat a fázisokat használjuk, amelyekben a 7.5.2. fejezetben említett kvázisztatikus atmoszféra közelítés alkalmazható.

- Figyelembe kellene venni azt, hogy a $v(r, t) (\neq v_R(t)!)$ sebesség a τ optikai mélység függvénye, amit a megfigyelések sugallnak. A pulzációs ciklusban látunk ugyanis nemcsak aszimmetrikus vonalprofilokat, hanem akár vonalkettőződéseket is. Mivel ezek a faktorok a fénygörbe egy-egy szakaszában különösen markánsak, ezért sokan ezeket a szakaszokat kihagyják az analízisből. A (10.12) szövsugár $\tau = 0$ -ra vonatkozik, ennek asztrofizikailag megfelelő párja $v_R(t)$.
- A v_γ sebesség 1kms^{-1} hibája d 10 százalékos hibáját idézi elő. Az 1kms^{-1} pontosság elérése szinte illuzórikus, mert csak v_{rad} -t tudjuk mérni, ami egyetlen adattal jellemzi egy kompresszibilis, olykor szuperszónikusan mozgó, lökéshullámokat tartalmazó gömbhéj mozgását egy v_γ sebességgel mozgó koordinatarendszerben.

10.5.2. Dinamikai módszer

A (7.35) dinamikai egyenlet felírva az $r \approx R$ tartományra kínál egy dinamikai módszert nemcsak d , hanem a pulzáló csillag tömegének a meghatározására is.

A pulzálás "nyugodt" fázisaiban, amikor a gyorsulások nem nagyok, és lökéshullámok nincsenek a csillag légkörében egy-egy t időpontban sztatikus légkörmodellek sorozatával közelíthetjük a $P(r, t), \rho(r, t), r \leq R$ rétegződéseket, amelyekkel a (7.34) kontinuitási egyenlet megoldható, vagyis a tömeg megmaradását kifejező $v(r, t), r \leq R$ sebességprofilot kapunk a légkörre. Amikor a légkör jól leírható sztatikus modellekkel különösen jó és egyszerű közelítés az r -től független

$$g_e(t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (10.17)$$

ahol $g_e(t)$ az időben változó effektív nehézségi gyorsulás, amihez egy (7.29) rétegződés tartozik. E lépés szemléltethető úgy, hogy a sztatikus légkörmodell \ddot{R} gyorsulással mozgó liftbe van bezárva, a lift teteje R -nél van, és annak környezetében kialakul a (7.29) rétegződés, amihez aztán $P(r, t) = \mathcal{R}T(\tau \approx 0)\rho(r, t)/\mu$ nyomás tartozik. Ha a $v(r, t)$ sebességprofil és (10.17)-t behelyettesítjük legalább két t időpontra (7.35)-be és felhasználjuk (10.12)-t végül megkapható (7.35) két ismeretlenje: \mathcal{M} és d .

E módszer alkalmazásának is vannak nehézségei, elsősorban az, hogy $\partial v / \partial t \approx \ddot{R}$ csak numerikus differenciálással kapható meg $\vartheta(t)$ -ből, továbbá $g_e(t)$ meghatározásának pontosságát nem könnyű a kívánt szintre fokozni, amint ezt a 10.2. ábra sejteti. De a nehézségek leküzdéséért cserébe itt nemcsak d -t, hanem egyúttal az \mathcal{M} tömeget is megkaptuk, és valamelyest tekintettel voltunk arra, hogy a csillag légköre nem infinitézimális vastagságú, vagy azonos sebességgel mozgó gömbhéj, hanem egy kompresszibilis gömbhéj tömegmegmaradást is figyelembe vevő áramlással.